Viikko 3 : Alkuviikko

M1 & M2 : $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-y^2} = \dfrac{x-y}{(x-y)(x+y)}$

$f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ suoran $x = y$ ulkopuolella.

Siispä rajankäynti onnistuu $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$

(Huom! $f(x,y)$ on määritelty kaikissa $(1,1)$:n ympäristöissä. Suoran $x=y$ "välttäminen" pois ei vaikuta.)

Jatkuvuus ko. pisteessä siis saavutetaan.

Lisäksi asettamalla $f(x,y) = \dfrac{1}{2x}$, kun $x=y$ (paitsi origossa) f on jatkuva.

Funktiota ei voi saattaa jatkuvaksi suoralla $y=-x$:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{|x+y|} \longrightarrow \infty, \text{ kun } y \to -x.$$

Alkuviikko

Tehtävä J1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a)}\ \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b)}\ \frac{x\tan y}{y}.$$

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

Ratkaisu Kumpikin tehtävässä annetuista funktioista on muotoa $f(x,y) = g(x)h(y)$, joten voimme käyttää hyödyksi tietoa:
Jos $\lim_{x\to 0} g(x) = a$ ja $\lim_{y\to 0} h(y) = b$, niin $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = ab$.

a) Valitaan

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ja} \quad h(y) = 1 + y^2,$$

jolloin

$$g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ja

$$h(y) = \lim_{y\to 0}(1 + y^2) = 1.$$

b) Vastaavasti valitaan

$$g(x) = x \quad \text{ja} \quad h(y) = \frac{\tan y}{y}.$$

Tällöin

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

ja

$$\lim_{y\to 0} h(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y}\right) = 1.$$

Siten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\tan y}{y} = \lim_{x\to 0} g(x) \lim_{y\to 0} h(y) = 0 \cdot 1 = 0.$$

J2

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$$

$$= 1 - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

Arvioidaan: $\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |xy^3|$

Identiteetti siis samassa muodossa kuin materiaaleissa:

$$\leq |xy^3| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Siis: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 - 0 = 1$

Valitaan $a = 1$.