

KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 3

Kotitehtävä 1. Millä arvoilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} ax + by = -1 \\ ay + bz = a \\ az + bx = a^2 \end{cases}$$

- a) ei ole ratkaisua?
- b) on täsmälleen yksi ratkaisu?
- c) on äärettömän monta ratkaisua?

Kotitehtävä 2. Kirjoita seuraava yhtälöryhmä matriisimuodossa, ja ratkaise se.

$$\begin{cases} x = y + z - 2 \\ y = x - w \\ z = 2x + 2y + 2w \\ w = x - 3 \end{cases}$$

Kotitehtävä 3. Kahden muuttujan x ja y neliöllinen polynomi on funktio

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

jossa $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. *Kartiroleikkaus* on pistejoukko tasossa, joka on esitettävissä muodossa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}$$

jollekin neliölliselle polynomille P . (Siispä esimerkiksi ellipsit kuten $ax^2 + cy^2 = 1$, paraabelit kuten $y = ax^2 + f$, ja hyperbelit kuten $xy = 1$ ovat kaikki kartiroleikkaukset)

Osoita, että minkä tahansa tasolla olevien viiden pisteen kautta voidaan muodostaa kartiroleikkaus.

Kotitehtävä 4.

- a) Etsi kaikki 2×2 -matriisit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ jolle pätee $A^2 = I$.
- b) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus jolle pätee $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ kaikille $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Laske a-osan vastauksesi avulla kaikki mahdolliset arvot $f(\mathbf{e}_1)$.

HARJOITUSTEHTÄVÄT VIIKKO 3

Harjoitustehtävä 1. Laske tulot, tai vasta “ei määritelty”.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävä 2. Onko vektori \mathbf{v} esitettävissä vektorijoukon M lineaarikombinaationa?

a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$

b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

Harjoitustehtävä 3. Kirjoita yhtälöryhmät matriisimuotoon, ratkaise ne, ja kirjoita ratkaisut vektorimuodossa.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 5x + 5y + z = 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x - y - z + w = 4 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = -3 \\ 3x - y - 2z = -6 \\ 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = -3 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Harjoitustehtävä 4. Ratkaise yhtälöryhmät, ja vertaa a- ja b-osan vastaukset. Selitä.

a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Harjoitustehtävä 5. Olkoot a, b, c, d reaaliluvut. Osoita, että vektorit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvia jos ja vain jos vektorit $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Harjoitustehtävä 6. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit (jos ne ovat käännettäviä).

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

f)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$