

VIKKO 3 LOPPUVIKKO

M1 $f(x,y) = xy + x^2$; $p = (2,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p = 2$$

M2 $f(x,y) = y^2 + x^2$

Neljäs kpl : $f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
 $f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$f_{11} = 2 \quad , \quad f_{12} = 0$$

$$f_{22} = 2 \quad , \quad f_{21} = 0$$

TEHTÄVÄ J1 Määritä se pinnan $\mathbf{r}(u, v) = (u+v)\mathbf{i} + (u^2+v^2)\mathbf{j} + (u^3+v^3)\mathbf{k}$ piste, jossa tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen. Mikä on tangenttitason yhtälö?

Ratkaisu: $(2, 10, 26)$, $9x + 3y - z = 22$.

RATKAISU

- Idea: Pinnan tangenttitaso on annetun tason suuntainen pisteissä, joissa pinnan (tangenttitason) ja tason normaalit ovat yhdensuuntaisia.

Pinnan kaksi tangenttivektoria saadaan osittaisderivaatoista

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + 3u^2\mathbf{k}$$

ja

$$\mathbf{r}_v(u, v) = \mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + 3v^2\mathbf{k}.$$

Näistä voidaan määrittää pinnalle normaalivektori

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 6uv(v-u)\mathbf{i} + 3(u-v)(u+v)\mathbf{j} + 2(v-u)\mathbf{k}$$

Toisaalta tarvitaan myös tason $9x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y) = 9x + 3y$ normaalivektoria:

$$\mathbf{N}_2 = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Normaalit ovat samansuuntaisia, kun $\mathbf{N}_1 = \lambda \mathbf{N}_2$, jollain $\lambda \neq 0$. Tästä seuraa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 6uv(v-u) = -9\lambda \\ 3(u-v)(u+v) = -3\lambda \\ 2(v-u) = \lambda \end{cases}$$

Yhtälöryhmän viimeisestä yhtälöstä seuraa $v-u = \lambda/2$ ja sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$6uv(v-u) = 3uv\lambda = -9\lambda \Leftrightarrow uv = -3.$$

Vastaavasti myös toisesta yhtälöstä voidaan nyt eliminoida λ , sillä

$$3(u-v)(u+v) = -3(v-u)(u+v) = -\frac{3\lambda}{2}(u+v) = -3\lambda \Leftrightarrow u+v = 2.$$

Parametrien u ja v täytyy näin ollen toteuttaa yhtälöt

$$uv = -3 \quad \text{ja} \quad u+v = 2.$$

Tällä yhtälöparilla on ratkaisut $(u, v) = (3, -1)$ ja $(u, v) = (-1, 3)$. Näillä parametrien arvoilla saadaan

$$\mathbf{r}(3, -1) = \mathbf{r}(-1, 3) = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 26\mathbf{k},$$

joten pinnan tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen pisteessä $(2, 10, 26)$.

- Pinnan normaalivektori pisteessä $(2, 10, 26)$ on

$$\mathbf{N}_1 = 72\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 8\mathbf{k} = 8(9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

ja tangenttitason yhtälö on muotoa

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_1 = 0,$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_1 &= ((x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 26\mathbf{k})) \cdot 8(9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= 8(9(x-2) + 3(y-10) - (z-26)) = 0 \\ \Leftrightarrow &9(x-2) + 3(y-10) - (z-26) = 0 \\ \Leftrightarrow &9x + 3y - z = 22. \end{aligned}$$

TEHTÄVÄ J2 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + v \cos u \mathbf{j} + \cos u \cos v \mathbf{k}$ pisteeseen $(0, 0, 1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.

Ratkaisu: $z = 1$.

RATKAISU Havaitaan, että piste $(0, 0, 1)$ on pinnalla $\mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{k}$. Kaksi tangenttivektoria pinnan pisteeseen ovat

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \cos v \mathbf{i} - v \sin u \mathbf{j} - \sin u \cos v \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_u(0, 0) = \mathbf{i}$$

ja

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -u \sin v \mathbf{i} + \cos u \mathbf{j} - \cos u \sin v \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_v(0, 0) = \mathbf{j}.$$

Selvästi pinnan normaalivektori kyseiseen pisteeseen on tällöin $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Tangenttitaso voidaan määrittää yhtälöstä

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0,$$

kun valitaan lisäksi $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}$.¹ Saadaan

$$((x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$$

¹ \mathbf{r}_0 on siis pisteen $(0, 0, 1)$ paikkavektori.