Perehdyttävä tehtävä viikko 4

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

Tehtävä 1. Toisen lukuviikon luennoilla opimme, miten löydeyään pisteen projektio (eli lähin piste) tasoon, kolme-ulotteisessa avaruudessa. Tänä viikkona yleistetään tämä idea, ja löydetään vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *ortogonaaliprojektio* mielivaltaiseen ala-avaruuteen $V \subseteq \mathbb{R}^n$, mielivaltaiselle n.

a) Vakuuta itsesi geometrisesti siitä, että jos $\mathbf{v} \in V$ on sellainen että $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ on mahdollisimman pieni, niin $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$ kaikille vektoreille $\mathbf{w} \in V$.[1]

b) Pohditaan ensin tapaus, jossa projisoidaan yksi-ulotteiseen ala-avaruuten, eli suoraan. Olkoon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ ja } V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Tällöin vektorin $\mathbf{x}$ projektio suoraan V on $\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jollekin $t \in \mathbb{R}$. Mille t pätee, että $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$?

c) Seuraavaksi projisoidaan kaksi-ulotteiseen avaruuteen $W \subseteq \mathbb{R}^4$. Olkoon edelleen $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$, ja olkoon

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Jos $\mathbf{v}$ on vektorin $\mathbf{x}$ projektiolle W:hen (piirrä kuva!), niin sen täytyy toteuttaa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Pystytäänkö tämä ehto kirjoittamaan matriisiyhtälönä?

d) Siispä toisaalta $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ jollekin $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ja toisaalta,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{v} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

[1] Vihje: Jos olisi olemassa vektori $\mathbf{w} \in V$ jolle $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} > 0$, korvaa v vektorilla $\mathbf{v} + \epsilon\mathbf{w}$, jossa ϵ on erittäin pieni positiivinen luku, ja katso mitä tapahtuu. Yksinkertaisuuden vuoksi, pohdi tapausta $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ensin.

(Vakuuta itsesi, että tämä seuraa (c)-osasta.) Kirjoita tämä ehto yhtälönä, joka sisältää matriisit ja vektorit $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (muttei $\mathbf{v}$).

e) Laske matriisitulon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi. Käyttäen tämä, löydä (d)-osan muuttuja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Mikä on sitten $\mathbf{v}$?

f) Yleistä tapaukseen, jossa projisoidaan avaruuteen

$$V = \{A\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

mielivaltaiselle $(n \times m)$-matriisille A (jossa $m < n$).

Kotitehtävät viikko 4

Kotitehtävä 1. Laske lyhyin etäisyys pisteestä $(2,1,2,1,2)$ joukkoon[2]

$$\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array} \right\}.$$

Kotitehtävä 2. Olkoon L_1 suora kolme-ulotteisessa avaruudessa, joka sisältää pisteen $(1,1,1)$ ja on vastakohtainen sekä vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ että vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaan.

Olkoon L_2 suora

$$\{(x,y,z) : cx = y = 2z\}.$$

a) Mille arvolle $c \in \mathbb{R}$, leikkavat suorat L_1 ja L_2 toisiinsa?
b) Tälle arvolle c, laske molempien suorien sisältävän tason yhtälö.

Kotitehtävä 3. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi.

Kotitehtävä 4. Etsi avaruuden

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$$

ortogonaalikanta.

[2] Huomaathan, ettei Π ole vektoriavaruus, sillä tämä ei sisällä origoa. Pystytkö silti käyttää lineaarigeometrian / matriisilaskennan ideoita?

Harjoitustehtävät viikko 4

Harjoitustehtävä 1. Laske seuraavien matriisien rangi:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vertaa tehtävien (c) ja (d) vastauksia. Selitä!

Harjoitustehtävä 2. Laske pisteen $(1, 3, 5)$ etäisyys tasoon

$$x + y + z = 0$$

kolme-ulotteisessa avaruudessa.

Harjoitustehtävä 3. Olkoon

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on lausekkeen $\left\| L\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$ pienin mahdollinen arvo, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$?

Harjoitustehtävä 4.

a) Etsi avaruuden $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ jokin kanta.
b) Etsi avaruuden S jokin *ortonormaali* kanta.

Harjoitustehtävä 5. Etsi kaava (parametreineen) kaikille matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

oikeanpuolisille käänteismatriiseille. Onko matriisilla vasenpuolista käänteismatriisia?

Harjoitustehtävä 6. Olkoon P_2 neliöllisen polynomien avaruus, ja kiinnitetään sen kanta $\{1, x, x^2\}$. Tutkitaan kaavan

$$L(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

antama kuvaus $P_2 \to \mathbb{R}^3$.

a) Osoita, että L on lineaarikuvaus.
b) Laske L:n matriisiesitys.
c) Onko L käännettävä?
d) Mitä tämä tarkoittaa "intuitiivisesti"? (Vihje: Vastaus on luultavasti tuttu ominaisuus jo lukion matematiikasta.)