K1

a) Lämpövirran suunta on lämpötilan nopeimman alenemisen suunta. Tiedetään, että lämpötila kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan, jolloin nopeimman alenemisen suunta on päinvastainen.

$$-\nabla u(3,1) = (25y\mathbf{i} + 25x\mathbf{j})|_{(3,1)} = 25\mathbf{i} + 75\mathbf{j}\ .$$

b) Suunnattu derivaatta yksikkövektorin $\mathbf{v}$ suuntaan on $D_{\mathbf{v}}u(x,y) = \mathbf{v} \cdot \nabla u(x,y)$. Koordinaattiakselien suuntaan saadaan suunnatut derivaatat

$$D_{\mathbf{i}}u(3,1) = \big(\mathbf{i} \cdot (-25y\mathbf{i} - 25x\mathbf{j})\big)\big|_{(3,1)} = -25$$
$$D_{\mathbf{j}}u(3,1) = \big(\mathbf{j} \cdot (-25y\mathbf{i} - 25x\mathbf{j})\big)\big|_{(3,1)} = -75\ .$$

Annetun vektorin suuntainen yksikkö vektori on $\mathbf{v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$. Tälle saadaan

$$D_{\mathbf{v}}u(3,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (-25y\mathbf{i} - 25x\mathbf{j})\big)\big|_{(3,1)} = -35\sqrt{5}\ .$$

Piirrä suunta tehtäväpaperin tiheyskuvaajaan. Vastaako tulos mielikuvaasi oikeasta ratkaisusta?

K2

Olkoon A ortogonaalinen eli $A^T A = I$ sekä

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) = f(b, c).$$

Tässä merkittiin lineaarimuunnettuja, uusia x- ja y-koordinaatteja sekaannusten välttämiseksi seuraavasti: $b = a_{11}x + a_{12}y$ ja $c = a_{21}x + a_{22}y$. Merkinnät ovat siis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Lasketaan aluksi osittaisderivaatat ketjusäännön avulla:

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f(A\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial f(b,c)}{\partial x} = \frac{\partial f(b,c)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial f(b,c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \\ &= f_b(b,c) \cdot a_{11} + f_c(b,c) \cdot a_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f(A\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{\partial f(b,c)}{\partial y} = \frac{\partial f(b,c)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial f(b,c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y} \\ &= f_b(b,c) \cdot a_{12} + f_c(b,c) \cdot a_{22}. \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi gradientti:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_x(\mathbf{x}) \\ F_y(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot f_b(b,c) + a_{21} \cdot f_c(b,c) \\ a_{12} \cdot f_b(b,c) + a_{22} \cdot f_c(b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_b(b,c) \\ f_c(b,c) \end{pmatrix} = A^T \cdot \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Äskeisessä huomattiin, että kerroinmatriisi on alkuperäisen A:n transpoosi, ja kerrottava vektori on sama kuin ∇f laskettuna muunnetussa koordinaatistossa.

Koska A on ortogonaalinen, niin

$$A\nabla F(\mathbf{x}) = AA^T \cdot \nabla f(A\mathbf{x}) = I \cdot \nabla f(A\mathbf{x}) = \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Tästä nähdään, että vastaus on sama huolimatta siitä, suoritetaanko muunto ennen vai jälkeen derivoinnin.