LASKUHARJOITUS VIIKKO 6, MATRIISILASKENTA

Kotitehtävät

Kotitehtävät tulee olla tehtynä ja ratkaisut kirjoitettuna viikon jälkimmäisessä laskuharjoituksessa, missä ne käydään läpi ja pisteytetään. Tehtävistä saa ja kannattaa keskustella muiden opiskelijoiden kanssa, mutta jokainen kirjoittaa omat vastauksensa.

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske A^{100}.

Tehtävä 2. Olkoon $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 45° rotaatio vastapäivään z-akselin ympäri. Laske ϕ:n matriisiesitys kannassa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tehtävä 3. Etsi matriisi A, jolla on ominaisarvot 1 ja -1, ja vastaavat ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tehtävä 4. Laske alakolmiomatriisi L sekä‘ yläkolmiomatriisi U, siten että

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtävät

Tehtävä 1. Jos (3×3) yläkolmiomatriisilla on lävistäjäalkiot $1, 2, 3$, niin se on varmuudella diagonalisotava. Miksi?

Tehtävä 2. Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 3. Diagonalisoi matriisi $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tehtävä 4. Miktät seuraavista matriiseista ovat diagonalisoitavat?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 5. Etsi matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ja

$$A' = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Mikä on näiden välinen suhde? Miksi?

Tehtävä 6

Laske alakolmiomatriisi L, lävistäjämatriisi D, sekä yläkolmiomatriisi U, siten että kaikki lävistäjäalkiot matriiseissa L ja U ovat ykköset, ja

$$LDU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 7

Määritellään lukujono a_n seuraavasti: $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ja

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ kun } n \geq 2.$$

Lukujonon ensimmäiset termit ovat siis

$$0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, \ldots$$

Merkitään $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, kokonaisluvuille $n \geq 2$.

a) Etsi matriisi A, jolle pätee $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ kaikille $n \geq 2$.
b) Diagonalisoi tämä matriisi A.
c) Etsi "suljettu kaava" (ilman rekursiota) luvulle a_n.

Tehtävä 8. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Tehtävä 9. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Tehtävä 10. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.