

TEHTÄVÄ K1 Etsi vakiot a, b, c siten, että integraali

$$\int_{-1}^1 (x - a \sin(\pi x) - b \sin(2\pi x) - c \sin(3\pi x))^2 dx$$

minimoituu. Mikä on integraalin arvo?

Ratkaisu: Vakiot saadaan ratkaisemalla pienimmän neliösumman yhtälöryhmä (integraointi on jatkuvaa summaamista):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} \int_{-1}^1 (x - a \sin(\pi x) - b \sin(2\pi x) - c \sin(3\pi x))^2 dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \int_{-1}^1 (x - a \sin(\pi x) - b \sin(2\pi x) - c \sin(3\pi x))^2 dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c} \int_{-1}^1 (x - a \sin(\pi x) - b \sin(2\pi x) - c \sin(3\pi x))^2 dx = 0 \end{cases}$$

Integroinnin ja derivoinnin järjestystä voidaan vaihtaa, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 -x \sin(\pi x) + a \sin(\pi x)^2 + b \sin(2\pi x) \sin(\pi x) + c \sin(3\pi x) \sin(\pi x) dx = 0 \\ \int_{-1}^1 -x \sin(2\pi x) + a \sin(\pi x) \sin(2\pi x) + b \sin(2\pi x)^2 + c \sin(3\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0 \\ \int_{-1}^1 -x \sin(3\pi x) + a \sin(\pi x) \sin(3\pi x) + b \sin(2\pi x) \sin(3\pi x) + c \sin(3\pi x)^2 dx = 0 \end{cases}$$

ja näistä integraaleista vakioiden arvoiksi $a = \frac{2}{\pi}, b = \frac{-1}{\pi}, c = \frac{2}{3\pi}$. Näin integraalin arvoksi saadaan $\frac{2}{3} - \frac{49}{9\pi^2}$.

TEHTÄVÄ K2 Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + \sin^2(xy) + \cos^3 y = 0 \\ y + \sin^3(x^2 + y^2) + \cos^5(x + y) = 0 \end{cases}$$

lähinnä origoa oleva ratkaisu kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla. Valitse lähtöarvoiksi $x_0 = -1$, $y_0 = -0.5$. Saatko iteraation suppenemaan jotakin muuta juurta kohti jollain toisella lähtöarvolla?

RATKAISU

Maple:

```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
f := <x + sin(x*y)^2 + cos(y)^3, y + sin(x^2 + y^2)^3 + cos(x + y)^5>:
invJ := MatrixInverse(Jacobian(f, [x, y])):

newtonstep := proc(ix, iy)
<ix, iy> - Multiply(evalf(eval(invJ, [x = ix, y = iy])), evalf(eval(f, [x = ix, y = iy]))):
end proc:
x0 := -1:
y0 := -0.5:
print('i' = 0, 'x' = x0, 'y' = y0):
Digits = 25:

for i to 6 do
  v := newtonstep(x0, y0):
  x0 := v[1]:
  y0 := v[2]:
  print('i' = i, 'x' = x0, 'y' = y0)
end do:
```

Kuudella iteraatiolla saadaan ratkaisulle approksimaatio

$$x = -0.812366032250553, y = -0.538090858562097.$$

Lisäksi tarkastelemalla yhtälöryhmän tasa-arvokäyriä voidaan havaita, ettei muita ratkaisuja ole.

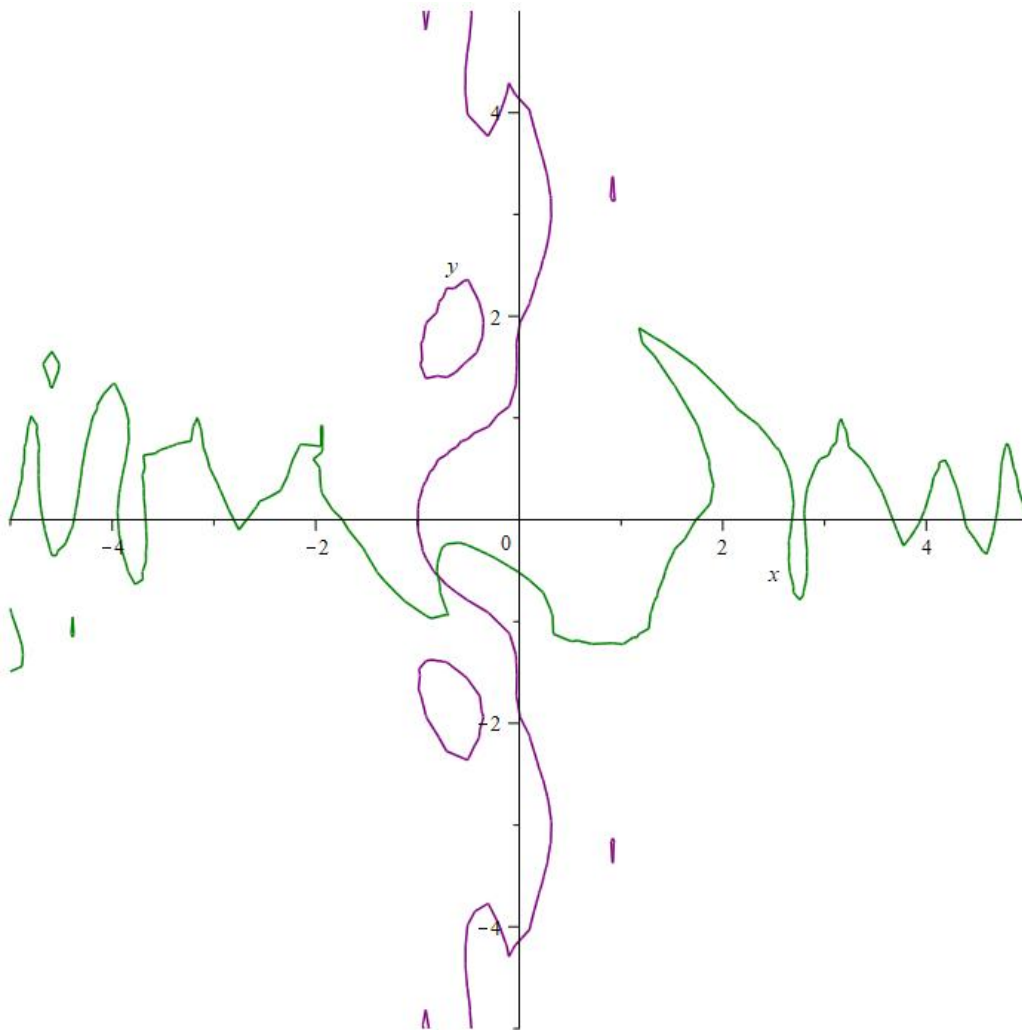
Maple:

with(plots):

```
p1 := contourplot(f[1], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, contours = [0], color = "Purple");
```

```
p2 := contourplot(f[2], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, contours = [0], color = "Green");
```

```
plots:-display({p1, p2}, size = [700, 700])
```



Kuva 1: Yhtälöryhmän tasa-arvokäyrät