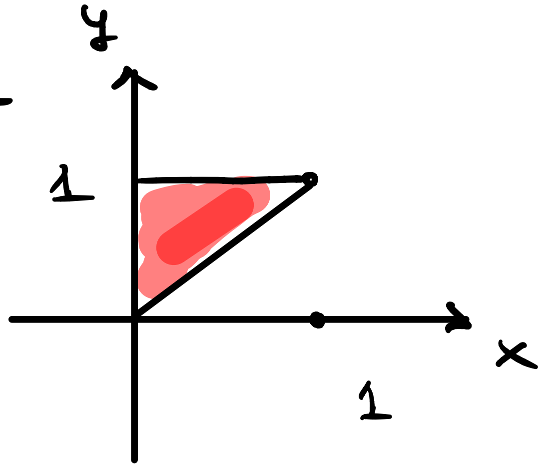
Viikko 6 LV

M1



$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy = I_1$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)\,dx = \Big/_0^1 x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_0^y dx = \int_0^1 y\,dy = \Big/_0^1 \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}$$

M2

$$\int_{-4}^{1}\int_{-1}^{3} dx\,dy = \int_{-4}^{1} dy \int_{-1}^{3} dx = 20$$

Itse lasku on suoraviivainen. Opittava asia on, että riippumattomat integraalit voi laskea erikseen.

Tämä on ns. tensoritulomuoto.

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a)} \int_A x^2\, da, \quad A = \{\, (x,y) \mid |x| + |y| \leq 1 \,\};$$

$$\text{b)} \int_A \frac{x}{y}\, da, \quad A = \{\, (x,y) \mid |x| \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2 \,\}.$$

Ratkaisu: a) $\frac{1}{3}$; b) 0.

RATKAISU

a) Integroimisalue A on suorien rajaama neliön muotoinen tasojoukko, jonka kärkipisteet ovat $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ja $(0,-1)$.

tapa 1. Itegroimisrajat ovat

$$1 - |x| \leq y \leq 1 - |x| \quad \textbf{ja} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_A x^2\, da &= \int_{-1}^{1} \int_{|x|-1}^{1-|x|} x^2\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \int_{|x|-1}^{1-|x|} dy\, dx && \Big\| \text{parillinen muuttujassa } y \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \Big(2 \int_0^{1-|x|} dy\, dx \Big) = 2 \int_{-1}^{1} x^2 (1 - |x|)\, dx && \Big\| \text{parillinen muuttujassa } x \\
&= 4 \int_0^1 x^2 (1-x)\, dx = 4 \Big/_{0}^{1} \Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big) \\
&= 4 \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Big) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

tapa 2. Tehdään muuttujanvaihto

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Tällöin uudeksi integroimisalueeksi saadaan

$$B = \{(u,v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

ja vaihdoksen Jacobin determinantiksi

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Sitten integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_A x^2\,da &= \int_B \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| db \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \frac{du\,dv}{2} \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \Big/_{-1}^{1} \frac{(u+v)^3}{3}\,dv \\
&= \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} \left((v+1)^3 - (v-1)^3\right) dv \\
&= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1} (3v^2+1)\,dv = \frac{1}{12} \Big/_{-1}^{1} (v^3+v) \\
&= \frac{1}{12}(1+1-((-1)^3+(-1))) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

b) Integroimisalue on suorakaide, jonka kärkipisteet ovat $(1,2), (-1,2), (-1,1)$ ja $(1,-2)$.

Integroimisrajoiksi saadaan

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{ja } 1 \leq y \leq 2.$$

Havaitaan, että

$$\int_A \frac{x}{y}\,da = \int_1^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{y}\,dx}_{=0}\,dy = 0,$$

koska sisempi integraali on (oleellisesti) pariton muuttujan x suhteen.

TEHTÄVÄ J2 Olkoon $a > 0$, $b > 0$, $A = \{\,(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_A e^{-(ax+by)^2}\, da$$

sijoituksella $u = ax + by,\ v = y/x$.
Ratkaisu: $\frac{1}{2ab}$.

RATKAISU Tehdään muuttujanvaihto ohjeiden mukaisesti:

$$\begin{cases} u &= ax + by \\ v &= y/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{u}{bv + a} \\ y &= \dfrac{uv}{bv + a} \end{cases}$$

Voidaan osoittaa, että kuvaus

$$\mathbf{F}\colon B \to \tilde{A},\ \mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

on bijektio, kun $\tilde{A} = A \setminus \partial A$ ja $B = \{(u, v) \mid u > 0, v > 0\}$.[1] Lisäksi, koska

$$A = \underbrace{\tilde{A} \cup (A \setminus \partial A)}_{\text{erilliset}}$$

ja reuna ∂A on *nollamittainen*, niin kaikilla integroituvilla funktioilla f on voimassa

$$\int_A f = \int_{\tilde{A} \cup \partial A} f = \int_{\tilde{A}} f + \underbrace{\int_{\partial A} f}_{=0} = \int_{\tilde{A}} f.$$

Näin ollen integraali voidaan muuttujanvaihdon jälkeen laskea yli joukon B.
Jacobin determinanttia laskiessa kannattaa huomata, että

$$\big(\det D\mathbf{F}(u, v) = \big)\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1},$$

sillä käänteisfunktion determinantti on tässä tapauksessa hieman helpompi laskea. Saadaan

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = \frac{a}{x} + \frac{by}{x^2}$$

[1] Todistus ylimääräinen HT

$$= \frac{ax+by}{x^2} = u\frac{1}{x^2} = \frac{(bv+a)^2}{u},$$

joten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{u}{(bv+a)^2}.$$

Voidaan integroida:

$$\begin{aligned}
&\int_A e^{-(ax+by)^2}\, da = \int_B e^{-u^2} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, db \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{u}{(bv+a)^2}\, du\, dv \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-u^2} u\, du \int_0^R \frac{dv}{(bv+a)^2} \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\Big/_0^R -\frac{1}{2} e^{-u^2} \Big) \left(\Big/_0^R -\frac{1}{b}\frac{1}{bv+a} \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2b} \big(e^{-R^2} - 1\big) \left(\frac{1}{bR+a} - \frac{1}{a} \right) \\
&= \frac{1}{2b}(0-1)\big(0 - \frac{1}{a}\big) = \frac{1}{2ab}.
\end{aligned}$$