LASKUHARJOITUS VIIKKO 5, MATRIISILASKENTA

Perehdyttävä tehtävä viikko 5

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

Tehtävä 1. Tässä harjoituksessa opetut tekniikat näyttävät, miten käy vektorille $v \in V$, kun se käy läpi saman lineaarikuvauksen $f : V \to V$ useita kertoja. Esimerkkiksi tutkitaan varsin yksinkertainen leijonista ja jäniksista koostuvista ekosysteemi, ja tahdomme nähdä kuinka tämä kehittyy. Olkoon ℓ leijonien lukumäärä ja j jäniksien lukumäärä annettuna vuonna. Tutkitaan siis vektorit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ja miten se kehittyy ajassa.

a) Lämmittelyharjoituksena, tutkitaan malli jossa eläimet eivät vuorovaikuta keskenään (ehkä ne ovat kenties eri häkissä jossain eläintarhassa). Tässä mallissa jänikset nelinkertaistuu vuodessa, kun taas kymmenesosa leijonista kuolee joka vuosi. Kaavoina, jos annettuna vuonna populaatiot kuvaa vektori $\begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix}$, niin seuraavan vuoden populaatiot ovat $\begin{pmatrix} 0.9\ell \\ 4j \end{pmatrix}$ Etsi matriisiyhtiö, joka kuvaa eri eläinten lukumäärä
   - vuoden päästä.
   - Sadan vuoden päästä.

b) Nyt tutkitaan luonnollisempi (villieläinten) malli, jossa leijonien lukumäärä vuoden kuluttua on $0.9\ell + 0.1j$, ja jäniksien lukumäärä vuoden kuluttua on $4j - 3\ell$. Etsi matriisiyhtiö, joka kuvaa eri eläinten lukumäärä
   - vuoden päästä.
   - Sadan vuoden päästä.

c) Jos alkuperäinen populaatio koostuu vaikka 1000:sta leijonasta ja 2000 jäniksestä, edellisen kohdan matriisiyhtälö ei välttämättä auttanut eläinten tarkan määrän laskemisessa 100 vuoden päästä (ilman laskukoneita). Jos kuitenkin oletamme että satumme tietämään että alkutilassa eläimiä oli tarkalleen yhtä monta (esim. 1000), pystymmekö nyt löytämään kaavan eläinten tarkalle lukumäärälle
   - vuoden päästä?
   - Sadan vuoden päästä?

Edellinen kohta (c) oli helppo (!?) sillä lähtöjakauma $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ sattui olemaan prosessin *ominaisvektori*, *ominaisarvolla* $\lambda = 1$. Tämä tarkoittaa että jos jakauma jonain vuonna oli $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, niin seuraavan vuoden jakauma oli $\lambda\mathbf{v}$. Mikä tahansa vektori jossa leijonien ja jänisten lukumäärät ovat samat on systeemin ominaisvektori ominaisarvolla 1, mutta systeemillä on myös muita, vaikeammin löydettäviä ominaispareja.

d) Oleta että lähtötilanteessa leijonia on 100 ja jäniksiä 3000. Kuinka monta eläintä nyt on
   - vuoden päästä?
   - Sadan vuoden päästä?

e) Eläinten lukumäärä sadan vuoden päästä on *lineaari*-funktio F eläinten lukumäärästä lähtötilanteessa. (Vakuuta itsesi tästä.) Tiedämme myös kaavan vekoreille $F\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix}$ sekä $F\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix}$. Kirjoita vektori $\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa
$$\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix},$$
ja käytä tätä apuna laskeaksesi vektorin $F\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}$, eli eläinten lukumäärät sadan vuoden päästä, jos lähtöpopulaatio oli 1000 leijonaa ja 2000 jänistä.

Tässä ongelmassa, ominaisvektorit $\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix}$ oli annettu (kiitos opettajan kiltteyden). Jos näitä ei olisi annettu, ei olisi lainkaan päivänselvää, että matriisilla $A = \begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\-3 & 4\end{pmatrix}$ ((joka kuvaa eläinpopulaatioiden muutosta ajassa, yhden vuoden harppauksin), on kyseiset ominaisvektorit, ominaisarvoin $\lambda = 1$ ja $\lambda = 3.9$. Itse asiassa, sellaiset ominaisvektorit ovat olemassa, sillä matriisiyhtälöllä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaalit ratkaisut, kun $\lambda = 1$ ja $\lambda = 3.9$. Toisin sanoen matriisi $A - \lambda I$ on *degeneroitunut*.

f) Minkä yhtälön on luvun λ toteutettava, jotta matriisi $A - \lambda I$ olisi degeneroitunut? (Vinkki: determinantti. Tästä opimme lisää tiistain luennolla 7.2.) Tiistain luennon jälkeen, vakuuta itsesi siitä, että matriisilla A ei ole muita ominaisarvoja kuin 1 ja 3.9.

Kotitehtävät viikko 5

Kotitehtävä 1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinantti $|A|$.

Kotitehtävä 1. ratkaisu.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Lasketaan jokainen 3x3 matriisin determinantti erikseen:

$$\det \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 3(0\cdot3-5\cdot2)+4(-2\cdot3-2\cdot2)+1(-2\cdot5-2\cdot0) = 3\cdot(-10)+4\cdot(-10)+1\cdot(-10) = -80$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(0\cdot3-5\cdot2)+4(-1\cdot3-0\cdot2)+1(-1\cdot5-0\cdot0) = 2\cdot(-10)+4\cdot(-3)+1\cdot(-5) = -37$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(-2\cdot3-2\cdot2)-3(-1\cdot3-0\cdot2)+1(-1\cdot2-0\cdot(-2)) = 2\cdot(-10)-3\cdot(-3)+1\cdot(-2) = -13$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(-2 \cdot 5 - 2 \cdot 0) - 3(-1 \cdot 5 - 0 \cdot 0) - 4(-1 \cdot 2 - 0 \cdot (-2)) = 3$$

Näin ollen koko matriisin A determinantti on

$$1 \cdot (-80) - 2 \cdot (-37) - 2 \cdot (-13) + 0 \cdot 3 = 20$$

Kotitehtävä 2. Osoita että, jos a, b, c ovat kolme *eri* reaalilukua, niin vektorit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumatomat. (Vihje: laske determinantti.)

Kotitehtävän 2 ratkaisu. Matriisin muodostavat vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat, jos matriisin determinantti on $\neq 0$. Toisin sanoen, jos determinantti on 0 on matriisin vektorit ovat silloin lineaarisesti riippuvat. Lähdetään vihjeenmukaisesti laskemaan matriisin determinanttia:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$bc^2 - b^2c - (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b) = bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b$$

Toisen asteen polynomifunktio on jaettavissa tekijöihin*

$$(b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$

*Tekijöihin jako
Tämän voi tehdä esim. vähentämällä ensimmäistä saraketta toisesta ja kolmannesta sarakkeesta, eli:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b-a & c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & c \\ a^2 & b+a & c^2 \end{vmatrix}$$

Tehdään tämä uudestaan kolmannelle sarakkeelle

$$(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & c \\ a^2 & b+a & c^2 \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & c-a \\ a^2 & b+a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & a+c \end{vmatrix}$$

Matriisin

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & a+c \end{vmatrix}$$

determinantti on $(a + c - (b + a)) = (c - b)$, joten koko matriisin determinantti on siten $(b - a)(c - a)(c - b)$.*

Tämä on selvästi 0, jos jokin sulkujen sisällä olevista lausekkeista saa arvon 0. Tämä toteutuu, kun a = c, a = b tai c = b, eli toisin sanoen kaksi luvuista ovat samoja. a, b ja c on kolme eri lukua, jolloin matriisin determinantti on $\neq 0$. Tästä seuraa, että vektorit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumatomat, kun a, b ja c ovat kolme eri lukua.

Kotitehtävä 3. Etsi sellainen kolmas sarake, että matriisi

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \cdot \end{pmatrix}$$

on ortonormaali. Tarkista, että rivitkin ovat ortonormaalit.

Kotitehtävä 3 ratkaisu. Ortonormaali (tai ortogonaalinen) matriisi on reaalikertoiminen matriisi, jonka kaikki rivit ja sarakkeet ovat ortogonaalit. Ortonormaalisuus on ortogonaalisuuden erityistapaus ja tarkoittaa, että matriisin vektorit muodostavat ortonormaalin kannan (vektorit ovat ortogonaalit, eli kohtisuorassa toisiaan vasten ja jokaisen vektorin pituus on 1). Ortonormaalisuudesta seuraa ehto, että matriisin ja sen transpoosin tulo on identiteettimatriisi. Eli

$$QQ^T = Q^TQ = I$$

Helppo tapa siis määrittää matriisin kolmas sarake on transpoosin kautta, josta saadaan ehto tuntemattomille muuttujille.
Merkataan

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & x \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & y \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & z \end{pmatrix}$$

jolloin

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Identiteettimatriisissa jokainen diagonaalilla oleva elementti on oltava 1, josta saadaan ehdot muuttujille x, y ja z ($Q^TQ = I$, joten tarkastellaan vain diagonaalilla olevia elementtejä).

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x \cdot x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + y \cdot y = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-3}{\sqrt{14}} \cdot \frac{-3}{\sqrt{14}} + z \cdot z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{14} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{14}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{42}} = \pm\frac{5}{\sqrt{42}} \\ y^2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{14} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{14}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{8}{21}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ z^2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{9}{14} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3} - \frac{9}{14}} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{42}} = \pm\frac{1}{\sqrt{42}} \end{cases}$$

x, y ja z arvot ovat nyt määritetty, mutta etumerkki tulee valita siten, että ortogonaalisuus toteutuu. Kaksi vektoria ovat ortgonaaliset, kun niiden välinen pistetulo on nolla. Lasketaan siis pistetulo ensimmäisen sarakevektorin kanssa.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm\frac{5}{\sqrt{42}} \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pm\frac{5}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pm\frac{1}{\sqrt{42}} = 0$$

Jaetaan puolittain termillä $\frac{1}{\sqrt{3}}$, jolloin yhtälö sievenee muotoon

$$\pm\frac{5}{\sqrt{42}} \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \pm \frac{1}{\sqrt{42}} = 0$$

Yhtälö on tosi selvästi, kun valitaan vektoriksi

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{42}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

Näin ollen matriisi Q on muotoa

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

Rivien ortonormaalisuus voidaan perustella yhtälön $QQ^T = I$ avulla. Q^T on matriisi, jonka sarakkeet ovat nyt matriisi Q:n rivit. Rivit ovat ortonormaalit, jos Q^T matriisin sarakkeet ovat ortonormaalit. Q^T transpoosi on vain Q, sillä $(Q^T)^T = Q$. Ortonormaalisuudesta seuraa yhtälö QQ^T, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa Q^TQ. Toisin sanon ortonormaalisuudesta seuraa, että matriisin sarakkeet ja rivit ovat ortonormaalit.

Kotitehtävä 4. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit. Vihje: Aseta $\mu := (\lambda - 1)^2$.

Kotitehtävä 4 ratkaisu. Matriisin ominaisvektoreille pätee yhtälö $Ax = \lambda x$, jota muokkaamalla saadaan

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

Lasketaan nyt matriisin A ominaisarvot.

$$A - \lambda I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ominaisarvojen laskemiseksi lasketaan matriisin determinantti, jotta saadaan muodostettua karakteristinen polynomi.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Determinantin laskemisessa vertaa kotitehtävän 1 ratkaisuun. Determinantit ovat:

$$(1-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1) - (\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

Seuraavaksi tulee ratkaista karakteristisen yhtälön nollakohdat

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

Tulon nollasääntöä hyödyntämällä saadaan ratkaisuiksi:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Nyt matriisin ominaisvektorit voidaan laskea yhtälöstä $Ax - \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda)x = 0$. Tämä täytyy tehdä erikseen jokaiselle eri ominaisarvolle, eli esim. ominaisarvolle $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ominaisvektori saadaan laskemalla:

$$\begin{pmatrix} 1 - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Tämän voi ratkaista käsin esimerkiksi Gaussin eliminaatiolla, tai hyödyntämällä laskinta, esim. Matlabia. Kaikki ominaisvektorit ovat:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, v_3 = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, v_4 = c_4 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, c_4 \in \mathbb{R}$$

Harjoitustehtävät viikko 5

Harjoitustehtävä 1. Olkoon T (3×3)-matriisi jolle pätee

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + 2y \\ x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

Laske matriisin T kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Harjoitustehtävä 1 ratkaisu. Selvästi matriisi T:n on oltava

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

jotta yhtälö olisi tosi. Matriisin T ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = 2$. Näitä arvoja vastaavat ominaisvektorit ovat:

$$\lambda_1 = 3, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävä 2. Laske seuraavat determinantit:

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

d)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

f)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Harjoitustehtävä 2 ratkaisut. a) 4 b) 0 c) 45 d) 24 e) 0 f) -2

Harjoitustehtävä 3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit. Vihje: Yksi karakteristisen polynomin juuri on suhteellisen helposti löydettävissä ihan tuijottamalla polynomia.

Harjoitustehtävä 3 ratkaisut.

$$\lambda_1 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{-i\sqrt{3}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{i\sqrt{3}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävä 4. Olkoon $P_n \leq n$-asteisten polynomien avaruus, luonnollisine kantoineen $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Laske seuraavien lineaarikuvauksien matriisit:

a) Derivointi:

$$D : P_3 \to P_2 \qquad Df(x) = f'(x)$$

b) Kertolasku polynomin $x + 1$ kanssa:

$$M : P_2 \to P_3 \qquad Mf(x) = (x+1)f(x).$$

c) Arvon laskeminen pisteissa $\{-1, 0, 1\}$:

$$E : P_2 \to \mathbb{R}^3 \qquad Ef = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtävä 4 ratkaisu. a)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävä 5. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

mielivaltaisille $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$. Vihje: Käytä kaava $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ sekä sarakeoperaatioita. Vertaa vastauksesi kotitehtäviin 2, ja päättele että sarakkeet ovat riippumatomia. Pystytkö arvaamaan[1] yleistämisen joillekin $n \times n$-matriisille? Tällaiset matriisit kutsutaan *Vandermonde-matriisiksi.*

Harjoitustehtävän 5 ratkaisu. Määritetään aluksi

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

P(x):n on oltava jokin kolmannen asteen polynomi, jonka muuttujia ovat a, b, c ja d. 4x4-matriisin determinantin määrittäminen tässä tapauksessa käsin on työlästä, joten jaetaan sen laskeminen kahteen osaan. Kotitehtävän 2 tapaan (Vandermonde-matriisin) determinantti voidaan voidaan jakaa ainakin tekijöihin (a-b)(a-c)(a-d). Alkuperäisessä matriisissa jokaisen muuttujan asteluku oli 3, jolloin myös determinantti sisältää jokaisen muuttujan kolmannen asteen termejä. Näin ollen koko determinantti on muotoa λ(a-b)(a-c)(a-d), jossa λ on jokin muuttujista b, c ja d riippuva polynomi.

λ:n määrittämiseksi muodostetaan uusi matriisi, joka ei enää sisällä muuttujasta a riippuvia termejä. Tämä uusi matriisi on muotoa:

$$\lambda = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix}$$

(4x4-matriisin ensimmäinen sarake sisältää muuttujan a termejä, joten se on eliminoitu. Alin rivi on eliminoitu siksi, että λ(a-b)(a-c)(a-d) sisältää jo kerran muuttujat b, c ja d, joten kertomalla näitä muuttujien kolmansien asteiden termeillä, olisi

[1] Tai pystytkö jopa todistamaan tämän? Tämä on aika vaativa tehtävä.

P(x) jo neljännen asteen polynomi, mikä ei ole mahdollista.) Tästä 3x3-matriisista seuraa, että $\lambda = (b-c)(b-d)(c-d)$ (vrt. kotiethtävän 2 ratkaisuun).
Näin ollen koko matriisin determinantti on (b - c)(b - d)(c - d)(a - b)(a - c)(a - d).
Kotitehtävän 2 vastauksessa perusteltiin, että matriisin determinantin ollessa $\neq 0$, sen vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Vandermonde-matriisin determinantista huomataan, että kahden tai useamman luvun ollessa samat on determinantti ainoastaan silloin 0.