LASKUHARJOITUS VIIKKO 6, MATRIISILASKENTA

Kotitehtävät

Kotitehtävät tulee olla tehtynä ja ratkaisut kirjoitettuna viikon jälkimmäisessä laskuharjoituksessa, missä ne käydään läpi ja pisteytetään. Tehtävistä saa ja kannattaa keskustella muiden opiskelijoiden kanssa, mutta jokainen kirjoittaa omat vastauksensa.

Tehtävä 1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske A^{100}.

Tehtävä 1 ratkaisu. Etsitään matriisin A ominaisarvohajotelma siten, että

$$A = PDP^{-1}$$
$$PP^{-1} = I$$

Etsitään ensin matriisin A ominaisarvot yhtälöstä:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Saadaan:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \left\{ -1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Ja niitä vastaavat ominaivektorit:

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Näistä saamme:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ -1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

P:n käänteismatriisin voi selvittää esimerkiksi Gaussin eliminaatiolla:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}+3}{4} & \frac{-15-7\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}+5}{20} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{4} & \frac{7\sqrt{5}-15}{20} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

Nyt siis:

$$A = PDP^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ -1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}+3}{4} & \frac{-15-7\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}+5}{20} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{4} & \frac{7\sqrt{5}-15}{20} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

Tämän avulla saamme laskettua A^{100}

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ -1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}^{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}+3}{4} & \frac{-15-7\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}+5}{20} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{4} & \frac{7\sqrt{5}-15}{20} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

Tehtävä 2. Olkoon $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 45° rotaatio vastapäivään z-akselin ympäri. Laske ϕ:n matriisiesitys kannassa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tehtävä 2 ratkaisu. Merkitään kantaa $K' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aloitetaan etsimällä ϕ:tä vastaava matriisiesitys normaalissa kannassa.

θ radiaanin rotaatio z-akselin suhteen vastapäivään avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on seuraavanlainen:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eli ϕ:tä vastaa normaalissa kannassa seuraava matriisi:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seuraavaksi etsitään matriisi, joka kuvaa kannan vaihtoa normaalista kannasta kantaan K':

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja sen käänteismatriisi K^{-1}, joka taas kuvaa vaihtoa kannasta K' normaaliin kantaan.

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyt siis ϕ:n matriisi esitys $R_{K'}$ kannassa K' on seuraava:

$$R_{K'} = K^{-1}RK$$

$$R_{K'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{K'} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 3. Etsi matriisi A, jolla on ominaisarvot 1 ja -1, ja vastaavat ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tehtävä 3 ratkaisu. Muodostetaan annetuilla tiedoilla matriisin A ominaisarvohajotelma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriisin P käänteismatriisin P^{-1} voi etsiä esimerkiksi Gaussin eliminaatiolla. Siis:

$$A = PDP^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Tehtävä 4. Laske alakolmiomatriisi L sekä‘ yläkolmiomatriisi U, siten että

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 4 ratkaisu. Aloitetaan saattamalla annettu matriisi porrasmuotoon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} = U$$

Seuraavaksi etsitään alakolmiomatriisi $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$ siten, että:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ l_{21} & 2l_{21} + 4 & l_{21} + 4 & -1 \\ l_{31} & 2l_{31} + 4l_{32} & l_{31} + 4l_{32} + 1 & -l_{32} - \frac{3}{4} \\ l_{41} & 2l_{41} + 4l_{42} & l_{41} + 4l_{42} + l_{43} & -l_{42} - \frac{3}{4}l_{43} + \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} l_{21} = -1 \\ l_{31} = 2 \\ l_{41} = 0 \\ -l_{32} - \frac{3}{4} = 0 \\ 2l_{41} + 4l_{42} = 0 \\ l_{41} + 4l_{42} + l_{43} = 1 \end{cases} \Rightarrow \{l_{21}, l_{31}, l_{32}, l_{41}, l_{42}, l_{43}\} = \left\{-1, 2, -\frac{3}{4}, 0, 0, 1\right\}$$

Eli siis:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävät

Tehtävä 1. Jos (3×3) yläkolmiomatriisilla on lävistäjäalkiot $1, 2, 3$, niin se on varmuudella diagonalisotava. Miksi?

Harjoitustehtvä 1 ratkaisu. Kaikki reaaliset $n \times n$ ylä- ja alakolmiomatriisit ovat diagonalisoituvia, jos niiden diagonaalilla on n kappaletta eri reaalilukuja tai jos ne kaikki ovat yhtä suuria, kun tämä matriisi itse on diagonaalimatriisi.

Eli jos 3×3 yläkolmiomatriisilla on lävistäjäalkiot 1, 2, 3, niin se on diagonalisoituva.

Tehtävä 2. Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtävä 2 ratkaisu. Etsimällä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit, saamme ominaisarvohajotelman:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Tehtävä 3. Diagonalisoi matriisi $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Harjoitustehtävän 3 ratkaisu. Etsimällä annetun matriisin ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit, saamme ominaisarvohajotelman:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Tehtävä 4. Mitkä seuraavista matriiseista ovat diagonalisoituvat?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Harjoitustehtävän 4 ratkaisu. b) ja d)

Tehtävä 5. Etsi matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ja

$$A' = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Mikä on näiden välinen suhde? Miksi?

Harjoitustehtävän 5 ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot:

$$\{\lambda_{11}, \lambda_{12}\} = \{4, -4\}$$

Ja niitä vastaavat ominaisvektorit:

$$\{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Matriisin A' ominaisarvot:

$$\{\lambda_{21}, \lambda_{22}\} = \{2, 10\}$$

Ja niitä vastaavat ominaisvektorit:

$$\{\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Huomaamme, että näillä kahdella matriisilla on samat ominaivektorit. Tästä seuraa, että nämä kaksi matriisia kommutoivat keskenään eli $AA' = A'A$.

Tehtävä 6

Laske alakolmiomatriisi L, lävistäjämatriisi D, sekä yläkolmiomatriisi U, siten että kaikki lävistäjäalkiot matriiseissa L ja U ovat ykköset, ja

$$LDU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtävän 6 ratkaisu.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 7

Määritellään lukujono a_n seuraavasti: $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ja

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ kun } n \geq 2.$$

Lukujonon ensimmäiset termit ovat siis

$$0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, \ldots$$

Merkitään $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, kokonaisluvuille $n \geq 2$.

a) Etsi matriisi A, jolle pätee $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ kaikille $n \geq 2$.
b) Diagonalisoi tämä matriisi A.
c) Etsi "suljettu kaava" (ilman rekursiota) luvulle a_n.

Harjoitustehtävän 7 ratkaisu. a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2}$$

Tehtävä 8. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Harjoitustehtävän 8 ratkaisu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{85} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{17} \\ \frac{4\sqrt{17}}{17} & \frac{\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}^T$$

Tehtävä 9. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Harjoitustehtävän 9 ratkaisu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T$$

Tehtävä 10. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Harjoitustehtävän 10 ratkaisu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$