Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

Esimerkkikokoelma 3

Aiheet:

Satunnaisvektorit ja moniulotteiset jakaumat
Tilastollinen riippuvuus ja lineaarinen korrelaatio

Satunnaisvektorit ja moniulotteiset todennäköisyysjakaumat

Satunnaisvektori on järjestetty lista $(X_1,\ldots,X_n)$ reaaliarvoisia perusjoukolla S määriteltyjä satunnaismuuttujia — eli mitallinen kuvaus perusjoukosta S n-ulotteiseen reaaliavaruuteen $\boldsymbol{R}^n$. Satunnaisvektorin $(X_1,\ldots,X_n)$ *jakauma* eli satunnaismuuttujien $X_1,\ldots,X_n$ *yhteisjakauma*

$$B \rightarrow \Pr(\ (X_1,\ldots,X_n) \in B\ )$$

kertoo, millä todennäköisyydellä vektori $(X_1,\ldots,X_n)$ kuuluu joukkoon B. Satunnaismuuttujien $X_1,\ldots,X_n$ yhteisjakauma on joukon $\boldsymbol{R}^n$ todennäköisyysjakauma. Yhteisjakauman i:s *reunajakauma* on satunnaismuuttujan X_i jakauma.

Kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat

Jatkossa rajoitutaan kaksiulotteisiin satunnaisvektoreihin (X,Y), sillä niistä voi puhua ja kirjoittaa ilman hankalia indeksimerkintöjä. Käytännön tilanteissa on helppo päätellä, miten kaksiulotteisille satunnaisvektoreille ja jakaumille johdetut tulokset yleistyvät usampiulotteisiin tapauksiin.

Kaksiulotteisen satunnaisvektorin (X,Y) *jakauma* eli satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauma*

$$B \rightarrow \mathrm{P}_{XY}(B) = \Pr(\ (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in B\ )$$

kertoo, millä todennäköisyydellä vektori eli lukupari (X,Y) kuuluu joukkoon B. Yllä määritelty P_{XY} on avaruuden $\boldsymbol{R}^2$ todennäköisyysjakauma. Jakauman P_{XY} *ensimmäinen reunajakauma*

$$A \rightarrow \mathrm{P}_{XY}(A \times \boldsymbol{R}) \ = \ \Pr(\ (X,Y) \in A \times \boldsymbol{R}\ ) \ = \ \Pr(\ X \in A\ )$$

kertoo, millä todennäköisyydellä satunnaisluku X kuuluu joukkoon A, ja *toinen reunajakauma*

$$A \rightarrow \mathrm{P}_{XY}(\boldsymbol{R} \times A) \ = \ \Pr(\ (X,Y) \in \boldsymbol{R} \times A) \ = \ \Pr(\ Y \in A\ )$$

kertoo, millä todennäköisyydellä satunnaisluku Y kuuluu joukkoon A. Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat ovat siis samat kuin yhteisjakauman P_{XY} reunajakaumat.

Diskreettien satunnaismuuttujien yhteisjakauma

Satunnaisvektori (X,Y) on *diskreetti*, jos sen komponentit ovat diskreettejä satunnaismuuttujia eli niiden arvojoukot voidaan numeroida äärellisenä tai äärettömänä listana. Diskreetin satunnaisvektorin (X,Y) *jakauma* eli satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauma* voidaan määrittää funktiosta

$$f_{XY}(x,y) \ = \ \Pr(X=x,\ Y=y)$$

käyttämällä kaavaa

$$\Pr((X,Y)\in B)) = \sum_{(x,y)\in B} f_{XY}(x,y).$$

Yllämääritelty funktio f_{XY} on diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio eli X:n ja Y:n *yhteispistetodennäköisyysfunktio*.

Diskreetin yhteisjakauman reunajakaumat

Pistetodennäköisyysfunktion f_{XY}(x,y) *reunapistetodennäköisyysfunktiot* määritellään kaavoilla

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y),$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y).$$

Jos f_{XY} on diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteispistetodennäköisyysfunktio, niin tällöin sitä vastaavat reunapistetodennäköisyysfunktiot f_X ja f_Y ovat X:n ja Y:n pistetodennäköisyysfunktiot, eli pätee

$$\Pr(X=x) = f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$$

ja

$$\Pr(Y=y) = f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y).$$

Huom. Kahden diskreetin satunnaismuuttujan yhteisjakauma on aina diskreetti

Jatkuvien satunnaislukujen yhteisjakauma

Satunnaisvektori (X,Y) on *jatkuva*, jos sen jakauma eli satunnaislukujen X ja Y yhteisjakauma voidaan esittää funktion $f_{XY}(x,y) \geq 0$ integraalina avulla muodossa

$$\Pr(a \le X \le b \text{ ja } c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

Funktio f_{XY} on satunnaisvektorin (X,Y) tiheysfunktio eli satunnaislukujen X ja Y *yhteistiheysfunktio*.

Jatkuvan yhteisjakauman reunajakaumat

Tiheysfunktion f_{XY}(x,y) *reunatiheysfunktiot* määritellään kaavoilla

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

ja

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Jatkuvan satunnaisvektorin (X,Y) komponentit ovat jatkuvia satunnaislukuja. Jos satunnaisluvuilla X ja Y on on yhteistiheysfunktio f_{XY}, niin tällöin sitä vastaavat reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y ovat X:n ja Y:n tiheysfunktioita.

Huom. Toisin kuin diskreetissä tapauksessa, kahden jatkuvan satunnaisluvun yhteisjakauma ei aina ole jatkuva.

Satunnaisvektorin kertymäfunktio

Kaksiulotteisen satunnaisvektorin (X,Y) *kertymäfunktio* eli X:n ja Y:n *yhteiskertymäfunktio*

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \leq x \text{ ja } Y \leq y)$$

kertoo todennäköisyyden tapahtumalle: X on enintään x ja Y enintään y.

Diskreetin satunnaisvektorin kertymäfunktio

Diskreetin satunnaisvektorin (X,Y) kertymäfunktio saadaan määritettyä X:n ja Y:n yhteispistetodennäköisyysfunktiosta kaavalla

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \leq x \text{ ja } Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f_{XY}(x_i, y_i).$$

Jatkuvan satunnaisvektorin kertymäfunktio

Jatkuvan satunnaisvektorin (X,Y) kertymäfunktio saadaan määritettyä X:n ja Y:n yhteistiheysfunktion avulla kaavasta

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \leq x \text{ ja } Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,dv\,du.$$

Satunnaismuuttujien tilastollinen riippumattomuus

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomat*, jos tapahtumat $\{X \in A\}$ ja $\{Y \in B\}$ ovat riippumattomat kaikilla A ja B, eli pätee

$$\Pr(X \in A,\ Y \in B) = \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B).$$

Satunnaislukujen X ja Y riippumattomuus voidaan selvittää yhteiskertymäfunktiosta $F_{XY}(x, y)$ seuraavasti: X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{kaikilla } x,y,$$

missä $F_X(x)$ ja $F_Y(y)$ X:n ja Y:n kertymäfunktiot.

Diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuus voidaan selvittää yhteispistetodennäköisyysfunktiosta $f_{XY}(x, y)$ seuraavasti: X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{kaikilla } x, y,$$

missä $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ ovat X:n ja Y:n pistetodennäköisyysfunktiot.

Jatkuvien satunnaislukujen X ja Y, joilla on yhteistiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$, riippumattomuus voidaan selvittää yhteispistetodennäköisyysfunktiosta $f_{XY}(x, y)$ seuraavasti: X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{kaikilla } x, y,$$

missä $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ ovat X:n ja Y:n tiheysfunktiot.

Diskreetin satunnaisvektorin muunnoksen odotusarvo

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteispistetodennäköisyysfunktio ja olkoon

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

funktio. Tällöin satunnaisluvun $g(X, Y)$ odotusarvo on

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f_{XY}(x,y).$$

Jatkuvan satunnaisvektorin muunnoksen odotusarvo

Olkoon $f_{XY}(x,y)$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio ja olkoon

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

funktio. Tällöin satunnaisluvun $g(X,Y)$ odotusarvo on

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)dydx.$$

Odotusarvo ja riippumattomuus

Jos satunnaisluvut X ja Y ovat *riippumattomat*, niin tulon XY odotusarvo on odotusarvojen tulo:

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \mu_X \mu_Y.$$

Huomautus:

Käänteinen ei päde: Siitä, että

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \mu_X \mu_Y$$

ei yleisesti seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

Kovarianssi

Olkoot satunnaislukujen X ja Y odotusarvot

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y.$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssi* on

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

Erityisesti

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$
$$\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

Kovarianssin kaava voidaan kirjoittaa seuraaviin yhtäpitäviin muotoihin:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Jos diskreeteillä satunnaisluvuilla X ja Y on yhteispistetodennäköisyysfunktio $f_{XY}(x,y)$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y).$$

Jos jatkuvilla satunnaisluvuilla X ja Y on yhteistiheysfunktio $f_{XY}(x,y)$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y)\,dxdy.$$

Kovarianssin ominaisuudet

Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = 0,$$

niin sanomme, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *lineaarisesti korreloimattomia*. Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat tilastollisesti riippumattomia, niin ne ovat lineaarisesti korreloimattomia. Sen sijaan käänteinen ei päde: Siitä, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat lineaarisesti korreloimattomia, *ei seuraa*, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$

ja kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY}.$$

Tällöin

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY}.$$

Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = 0,$$

niin

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

Pearsonin korrelaatiokerroin

Olkoon satunnaisluvuilla X ja Y seuraavat odotusarvot, varianssit ja kovarianssi:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2$$
$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y \qquad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{XY}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin korrelaatiokerroin* on

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Korrelaatiokertoimen ominaisuudet

Huomaa, että

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=\rho_{XY}=0$$

täsmälleen silloin, kun

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=0.$$

Jos siis

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=\rho_{XY}=0,$$

niin satunnaismuuttujat X ja Y ovat *lineaarisesti korreloimattomia*.

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin korrelaatiokerroin* Cor(X, Y). Tällöin

(i) $-1\le \mathrm{Cor}(X,Y)\le +1$

(ii) Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=0$$

(iii) $\mathrm{Cor}(X,Y)=\pm 1$

jos ja vain jos

$$Y=\alpha+\beta X,$$

missä α ja β ovat reaalisia vakioita ja $\beta\neq 0$. Lisäksi vakion β merkki on sama kuin korrelaation Cor(X, Y) merkki.

Siten Pearsonin korrelaatiokerroin ρ_{XY} mittaa satunnaismuuttujien X ja Y *lineaarisen riippuvuuden* voimakkuutta: Mitä suurempi on korrelaatiokertoimen itseisarvo $|\,\rho_{XY}\,|$, sitä voimakkaammin satunnaismuuttujat X ja Y riippuvat lineaarisesti toisistaan.

Lineaarimuunnokset ja kaksiulotteisen jakauman tunnusluvut

Olkoot satunnaismuuttujilla X ja Y seuraavat odotusarvot, varianssit ja kovarianssi:

$$\mathrm{E}(X)=\mu_X \qquad \mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$$

$$\mathrm{E}(Y)=\mu_Y \qquad \mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\sigma_{XY}$$

Olkoot

$$W=a+bX$$

$$Z=c+dY$$

missä a, b, c, d ovat reaalisia vakioita. Tällöin

$$\mathrm{E}(W) = a + b\,\mathrm{E}(X) = a + b\mu_X$$

$$\mathrm{E}(Z) = c + d\,\mathrm{E}(Y) = c + d\mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(W) = b^2\,\mathrm{Var}(X) = b^2\sigma_X^2$$

$$\mathrm{Var}(Z) = d^2\,\mathrm{Var}(Y) = d^2\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(W,Z) = bd\,\mathrm{Cov}(X,Y) = bd\sigma_{XY}$$

$$\mathrm{Cor}(W,Z) = \mathrm{sgn}(bd)\,\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{sgn}(bd)\rho_{XY}$$

Ehdolliset jakaumat

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio (vast. yhteispistetodennäköisyysfunktio) $f_{XY}(x, y)$ ja satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktiot (pistetodennäköisyysfunktiot) $f_X(x)$ ja $f_Y(x)$.

Satunnaismuuttujan X *ehdollinen tiheysfunktio* (vast. pistetodennäköisyysfunktio) satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla $Y = y$) on

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ , jos } f_Y(y) > 0\,.$$

Ehdolliset jakaumat ja riippumattomuus

Jos X ja Y ovat riippumattomat, satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma Y:n suhteen yhtyy satunnaismuuttujan X jakaumaan:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \text{ , jos } f_Y(y) > 0\,.$$

Diskreetin satunnaisvektorin ehdolliset odotusarvot

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y diskreettejä.

Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo* satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla Y=y) on ehdollisen jakauman odotusarvo

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)\,.$$

Jatkuvan satunnaisvektorin ehdolliset odotusarvot

Olkoon (X,Y) jatkuva satunnaisvektori.

Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo* satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla Y=y) on ehdollisen jakauman odotusarvo

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx\,.$$

Ehdolliset odotusarvot ja riippumattomuus

Jos X ja Y ovat *riippumattomat*, ehdolliset odotusarvot yhtyvät tavallisiin odotusarvoihin. Jos siis X ja Y ovat *riippumattomat*, niin

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \mathrm{E}(X)$$
$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mathrm{E}(Y)$$

Regressiofunktiot

Tarkastellaan satunnaisluvun X ehdollista odotusarvoa

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y)$$

ehtomuuttujan Y arvojen y funktiona. Tätä funktiota kutsutaan X:n *regressiofunktioksi* ehtomuuttujan Y suhteen. Yllämääritelty regressiofunktio määrittelee *regressiokäyrän*

$$x = g_y(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y) .$$

Moniulotteisia jakaumia

Kaksiulotteinen normaalijakauma

Jatkuva satunnaisvektori (X, Y) noudattaa **kaksiulotteista normaalijakaumaa**, jos sen tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)} Q(x, y) \right\},$$

missä

$$Q(x, y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2$$

ja

$$-\infty < \mu_X < +\infty \qquad \sigma_X > 0$$
$$-\infty < \mu_Y < +\infty \qquad \sigma_Y > 0$$
$$-1 \le \rho_{XY} \le +1$$

Merkintä: $(X, Y) : \ (\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$

Yllämääritelty funktio $Q(x, y)$ määrää tiheysfunktion *tasa-arvokäyrät*. Kaikki tasa-arvokäyrät ovat *ellipsejä*, joiden yhtälöt voidaan ilmaista muodossa

$$Q(x, y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 = c^2$$

missä c on vakio.

Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktion parametreina ovat satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*, *varianssit* ja *korrelaatio*: Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat

$$\mu_X = \mathrm{E}(X)$$
$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$$

satunnaismuuttujien X ja Y varianssit ovat

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)^2\right]$$
$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\left[(Y-\mu_Y)^2\right]$$

ja satunnaismuuttujien X ja Y Pearsonin korrelaatiokerroin on

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\,,$$

missä

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

on satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi.

Kaksiulotteista normaalijakaumaa noudattavan satunnaisvektorin (X, Y) *odotusarvovektori* on

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$$

ja *kovarianssimatriisi* on

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Kaksiulotteisen normaalijakauman reunajakaumat ovat yksiulotteisia normaalijakaumia:

$$Y:\ \ \mathrm{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$$
$$X:\ \ \mathrm{N}(\mu_X,\sigma_X^2)$$

Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa satunnaismuuttujien X ja Y lineaarisesti korreloimattomuudesta seuraa niiden riippumattomuus. Muista, että *riippumattomuudesta aina seuraa korreloimattomuus*, mutta yleisesti *käänteinen ei päde*.

Kaksiulotteisen normaalijakauman ehdolliset jakaumat ovat yksiulotteisia normaalijakaumia:

$$(X\,|\,Y):\ \ \mathrm{N}(\mu_X + \beta_{XY}(y-\mu_Y)\,,\,\sigma_X^2(1-\rho_{XY}^2))\,,\ \beta_{XY} = \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

$$(Y\,|\,X):\ \ \mathrm{N}(\mu_Y + \beta_{YX}(x-\mu_X)\,,\,\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2))\,,\ \beta_{YX} = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Ehdollinen odotusarvo

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y=y) = \mu_X + \beta_{XY}(y-\mu_Y)$$

on muuttujan X regressiofunktio muuttujan Y suhteen. Ylläolevan funktion määrittämän suoran kulmakerroin on $\beta_{XY} = \rho_{XY}\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ ja suora kulkee pisteen (μ_X, μ_Y) kautta.

Huomaa, että regressiosuorien kulmakertoimet β_{XY} ja β_{YX} toteuttavat yhtälön

$$\beta_{YX}\beta_{XY} = \rho_{XY}^2\,.$$

Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa satunnaismuuttujien Y ja X Pearsonin korrelaatiokerroin on

$$\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho_{XY} = \rho_{YX} = \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_Y\sigma_X}$$

ja ehdolliset varianssit ovat

$$\sigma_{X|Y}^2 = \sigma_X^2(1-\rho_{XY}^2)$$
$$\sigma_{Y|X}^2 = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)$$

Esimerkki 6.1

Heitetään kahta symmetristä noppaa ja määritellään satunnaismuuttujat

X = 1. nopan heiton tulos

Y = 2. nopan heiton tulos

$Z = X - Y$

Määrää:

(a) Satunnaismuuttujien X ja Z yhteisjakauma.

(b) Satunnaismuuttujien X ja Z jakaumat.

(c) Satunnaismuuttujan Z odotusarvo.

(d) Satunnaismuuttujan Z varianssi.

(e) Satunnaismuuttujien X ja Z kovarianssi.

(f) Satunnaismuuttujan Z ehdollinen jakauma ehdolla $X = 2$.

(g) Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $Z = -3$.

(h) Satunnaismuuttujan Z ehdollinen odotusarvo ehdolla X.

Esimerkki 6.1 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.1. tarkastellaan diskreettien satunnaismuuttujien yhteisjakaumaa, tunnuslukuja sekä ja ehdollisia jakaumia.

Esimerkki 6.1 – Ratkaisu

(a) Satunnaismuuttujien X ja Y pistetodennäköisyysfunktiot

$f_X(i) = \Pr(X = i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$f_Y(i) = \Pr(Y = i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$f_X(i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$f_Y(i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Määritetään seuraavaksi heittotulosten erotuksen $Z = X - Y$ jakauma.

Satunnaismuuttujan Z mahdolliset arvot ovat

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$

Muodostetaan aputaulukko, joka esittää kaikkia mahdollisia tapoja, joilla erotuksen $Z = X - Y$ mahdolliset arvot voivat syntyä:

Erotus $Z = X - Y$		Tulos 1. nopan heitosta = X					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tulos 2. nopan heitosta = Y	**1**	0	1	2	3	4	5
	2	–1	0	1	2	3	4
	3	–2	–1	0	1	2	3
	4	–3	–2	–1	0	1	2
	5	–4	–3	–2	–1	0	1
	6	–5	–4	–3	–2	–1	0

Satunnaismuuttujan $Z = X - Y$ pistetodennäköisyysfunktio

$$f_Z(k) = \Pr(Z = k)\ ,\ k = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$$

voidaan lukea suoraan tästä aputaulukosta. Tulos voidaan esittää seuraavana taulukkona:

k	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f_Z(k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Esimerkiksi –3 voi tulla erotuksen $Z = X - Y$ arvoksi täsmälleen kolmella eri tavalla:

Tapaus 1: $X = 1$, $Y = 4$, $Z = X - Y = -3$

Tapaus 2: $X = 2$, $Y = 5$, $Z = X - Y = -3$

Tapaus 3: $X = 3$, $Y = 6$, $Z = X - Y = -3$

Satunnaismuuttujien X ja $Z = X - Y$ yhteispistetodennäköisyysfunktio

$$f_{XZ}(i, k) = \Pr(X = i \text{ ja } Z = k)$$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

$f_{XZ}(i, k)$		Tulos 1. nopan heitosta = $X = i$					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$Z = X - Y = k$	**5**	0	0	0	0	0	1/36
	4	0	0	0	0	1/36	1/36
	3	0	0	0	1/36	1/36	1/36
	2	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	–1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
	–2	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
	–3	1/36	1/36	1/36	0	0	0
	–4	1/36	1/36	0	0	0	0
	–5	1/36	0	0	0	0	0

Esimerkiksi

$$f_{XZ}(2, 4) = \Pr(X = 2 \text{ ja } Z = 4) = 0,$$

koska silmälukujen erotukseksi ei voi tulla 4, jos 1. nopalla on saatu silmäluku 2.

Edelleen

$$f_{XZ}(3, -1) = \Pr(X = 3 \text{ ja } Z = -1) = 1/36,$$

koska tulos

$$\{X = 3 \text{ ja } Z = -1\}$$

voi syntyä täsmälleen yhdellä tavalla:

$$X = 3 \text{ ja } Y = 4.$$

(b) Satunnaismuuttujien X ja Z jakaumat saadaan laskemalla yhteisjakaumaa kuvaavan taulukon rivi- ja sarakesummat:

$f_{XZ}(i,k)$		Tulos 1. nopan heitosta = $X = i$						Summa
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
$Z = X - Y = k$	**5**	0	0	0	0	0	1/36	1/36
	4	0	0	0	0	1/36	1/36	2/36
	3	0	0	0	1/36	1/36	1/36	3/36
	2	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	4/36
	1	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36
	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36
	–1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	5/36
	–2	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	4/36
	–3	1/36	1/36	1/36	0	0	0	3/36
	–4	1/36	1/36	0	0	0	0	2/36
	–5	1/36	0	0	0	0	0	1/36
Summa		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

(c) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i i \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Vastaavasti satunnaismuuttujan Y odotusarvo on

$\mathrm{E}(Y) = 21/6 = 3.5.$

Yleisesti pätee:

$\mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y).$

Siten erotuksen $Z = X - Y$ odotusarvo on

$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0.$

(d) Satunnaismuuttujan X toinen momentti on

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_i i^2 \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6} = 15.17.$$

Koska (c)-kohdan mukaan

$\mathrm{E}(Y) = 21/6 = 3.5,$

niin satunnaismuuttujan X varianssi on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left[\frac{21}{6}\right]^2 = \frac{35}{12} = 2.917\,.$$

Vastaavasti satunnaismuuttujan Y varianssi on

$$\mathrm{Var}(Y) = 35/12 = 2.917.$$

Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomat*, niin

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 35/6 = 5.833.$$

(e) Todistetaan ensin seuraava aputulos:

$$\mathrm{Cov}(X, X - Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Koska kovarianssi ja varianssi ovat *invariantteja siirron suhteen* eli

$$\mathrm{Cov}(U + a, V + b) = \mathrm{Cov}(U, V)$$

ja

$$\mathrm{Var}(U + a) = \mathrm{Var}(U)$$

kaikille reaalisille vakioille a ja b, niin voimme olettaa todistuksen yleisyyden kärsimättä, että

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0.$$

Siten

$$\mathrm{Cov}(X, X - Y) = \mathrm{E}[X(X - Y)] = \mathrm{E}[X^2 - XY] = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(XY) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X, Y).$$

Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat tässä *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

Siten satunnaismuuttujien X ja $Z = X - Y$ kovarianssiksi saadaan

$$\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Var}(X) = 35/12 = 2.917.$$

(f) Satunnaismuuttujan Z *ehdollisten jakaumien*, kun ehtomuuttujana on X, *pistetodennäköisyysfunktiot* saadaan kaavalla

$$f_{Z|X}(k\,|\,i) = \frac{f_{XZ}(i,k)}{f_X(i)}\,,\ i = 1,2,\ldots,6\,,\ k = -5,-4,\ldots,4,5$$

Ehdollisten jakaumien pistetodennäköisyysfunktiot voidaan esittää seuraavana taulukkona, jossa ehdolliset jakaumat ovat *sarakkeina*:

$f_{Z\|X}(k\|i)$		Tulos 1. nopan heitosta = X = i					
		1	**2**	3	4	5	6
	5	0	**0**	0	0	0	1/6
	4	0	**0**	0	0	1/6	1/6
	3	0	**0**	0	1/6	1/6	1/6
	2	0	**0**	1/6	1/6	1/6	1/6
Z	**1**	0	**1/6**	1/6	1/6	1/6	1/6
$= X - Y$	**0**	1/6	**1/6**	1/6	1/6	1/6	1/6
$= k$	**–1**	1/6	**1/6**	1/6	1/6	1/6	0
	–2	1/6	**1/6**	1/6	1/6	0	0
	–3	1/6	**1/6**	1/6	0	0	0
	–4	1/6	**1/6**	0	0	0	0
	–5	1/6	**0**	0	0	0	0

Lihavoitu sarake taulukossa esittää satunnaismuuttujan $Z = X - Y$ ehdollista jakaumaa ehdolla $X = 2$. Esimerkiksi, jos $x = 2$ ja $z = 4$, niin

$$f_{Z|X}(4|2) = \frac{f_{XZ}(2,4)}{f_X(2)} = \frac{0}{1/6} = 0.$$

Edelleen, jos $x = 2$ ja $z = -2$, niin

$$f_{Z|X}(-2|2) = \frac{f_{XZ}(2,-2)}{f_X(2)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}.$$

Ehdolliset pistetodennäköisyydet saadaan jakamalla (b)-kohdassa esitetyn taulukon solutodennäköisyydet satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyyksillä.

(g) Satunnaismuuttujan X *ehdollisten jakaumien*, kun ehtomuuttujana on Z, *pistetodennäköisyysfunktiot*, saadaan kaavalla

$$f_{X|Z}(i|k) = \frac{f_{XZ}(i,k)}{f_Z(k)}\,,\ i = 1,2,\ldots,6\,,\ k = -5,-4,\ldots,4,5$$

Ehdollisten jakaumien pistetodennäköisyysfunktiot voidaan esittää seuraavana taulukkona, jossa ehdolliset jakaumat ovat riveinä:

$f_{X\mid Z}(i\mid k)$		1. nopan heiton tulos $X = i$						Summa
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
	5	0	0	0	0	0	1	1
	4	0	0	0	0	1/2	1/2	1
	3	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1
	2	0	0	1/4	1/4	1/4	1/4	1
Z	1	0	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1
$= X - Y$	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$= k$	–1	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	0	1
	–2	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	1
	–3	**1/3**	**1/3**	**1/3**	**0**	**0**	**0**	**1**
	–4	1/2	1/2	0	0	0	0	1
	–5	1	0	0	0	0	0	1

Lihavoitu rivi taulukossa esittää satunnaismuuttujan X ehdollista jakaumaa ehdolla $Z = –3$. Esimerkiksi, jos $x = 2$ ja $z = 4$, niin

$$f_{X|Z}(2|4) = \frac{f_{XZ}(2,4)}{f_Z(4)} = \frac{0}{2/36} = 0.$$

Edelleen, jos $x = 2$ ja $z = –2$, niin

$$f_{X|Z}(2|-2) = \frac{f_{XZ}(2,-2)}{f_Z(-2)} = \frac{1/36}{4/36} = \frac{1}{4}.$$

Ehdollisten jakaumien pistetodennäköisyydet saadaan jakamalla (b)-kohdassa esitetyn taulukon solutodennäköisyydet satunnaismuuttujan Z pistetodennäköisyyksillä.

(h) Kohdan (f) taulukosta (laskemalla tai symmetria-argumentin perusteella) saadaan satunnaismuuttujan Z *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan X suhteen

$$\mathrm{E}(Z|X{=}i) = \sum z f_{Z|X}(k|i)$$

helposti esitettyä seuraavana taulukkona:

$X = i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathrm{E}(Z\mid X = i)$	–2.5	–1.5	–0.5	0.5	1.5	2.5

Esimerkiksi, jos $X = 2$, niin

$$\mathrm{E}(Z \mid X = 2) = \sum_{k=-5}^{5} k \Pr(Z = k \mid X = 2) = \sum_{k=-4}^{1} k \frac{1}{6} = -\frac{3}{2} = -1.5 .$$

Esimerkki 6.2

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio

$$\Pr(X = 2, Y = 3) = \Pr(X = 1, Y = 1) = \Pr(X = -1, Y = 1) = \Pr(X = -1, Y = -2) = 1/4.$$

Määrää:

(a) Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat.

(b) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit ja keskihajonnat.

(c) Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi.

(d) Satunnaismuuttujien X ja Y Pearsonin korrelaatiokerroin.

(e) Satunnaismuuttujan Y ehdolliset jakaumat.

(f) Satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo ehdolla X.

Esimerkki 6.2 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.2 tarkastellaan *diskreettien* satunnaismuuttujien *yhteisjakaumaa*, *ehdollisia jakaumia* sekä *tunnuslukuja*.

Esimerkki 6.2 – Ratkaisu

(a) Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteispistetodennäköisyysfunktio*

$$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x \text{ ja } Y = y)$$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

$f_{XY}(x, y)$		x		
		–1	**1**	**2**
y	**3**	0	0	1/4
	1	1/4	1/4	0
	–2	1/4	0	0

Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumien

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \textstyle\sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \textstyle\sum_x f_{XY}(x, y)$$

pistetodennäköisyysfunktiot saadaan yhteispistetodennäköisyysfunktiota esittävästä taulukosta *rivi*- ja *sarakesummina*:

$f_{XY}(x, y)$	x				$f_Y(y)$
		–1	**1**	**2**	
y	**3**	0	0	1/4	**1/4**
	1	1/4	1/4	0	**1/2**
	–2	1/4	0	0	**1/4**
$f_X(x)$		**1/2**	**1/4**	**1/4**	1

(b) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x \Pr(X = x) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Satunnaismuuttujan X toinen momentti on

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_x x^2 \Pr(X = x) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75.$$

Satunnaismuuttujan X varianssi on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{7}{4} - \left[\frac{1}{4}\right]^2 = \frac{27}{16} = 1.6875.$$

Satunnaismuuttujan X keskihajonta on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\frac{27}{16}} = 1.2990.$$

Satunnaismuuttujan Y odotusarvo on

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_y y \Pr(Y = y) = -2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Satunnaismuuttujan Y toinen momentti on

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sum_y y^2 \Pr(Y = y) = (-2)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

Satunnaismuuttujan Y varianssi on

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \mathrm{E}[Y - \mathrm{E}(Y)]^2 = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2 = \frac{15}{4} - \left[\frac{3}{4}\right]^2 = \frac{51}{16} = 3.1875.$$

Satunnaismuuttujan Y keskihajonta on

$$\mathrm{D}(Y) = \sqrt{\frac{51}{16}} = 1.7854\,.$$

(c) Määrätään ensin

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xy\,\Pr(X = x, Y = y) \\ &= (-1)\times(-2)\times\frac{1}{4} + (-1)\times 1\times\frac{1}{4} + 1\times 1\times\frac{1}{4} + 2\times 3\times\frac{1}{4} = 2\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi on

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 2 - \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{29}{16} = 1.8125\end{aligned}$$

(d) Satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin korrelaatiokerroin* on

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} = \frac{\frac{29}{16}}{\sqrt{\frac{27}{16}}\times\sqrt{\frac{51}{16}}} = \frac{29}{\sqrt{27\times 51}} = \frac{29}{9\sqrt{17}} = 0.78150\,.$$

(e) Muodostetaan satunnaismuuttujan Y ehdollisten jakaumien pistetodennäköisyysfunktiot, kun ehtomuuttujana on X:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{YX}(y,x)}{f_X(x)}\,.$$

$x = -1$:

y	**–2**	**1**	**3**
$f_{Y\|X}(y\|-1)$	1/2	1/2	0

$x = 1$:

y	**–2**	**1**	**3**
$f_{Y\|X}(y\|1)$	0	1	0

$x = 2$:

y	**–2**	**1**	**3**
$f_{Y\mid X}(y\mid 2)$	0	0	1

Ehdollisten jakaumien pistetodennäköisyydet saadaan jakamalla (a)-kohdassa esitetyn taulukon solutodennäköisyydet satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyyksillä.

(f) Ehdolliset odotusarvot

$$\mathrm{E}(Y\mid X = x) = \sum y f_{Y\mid X}(y\mid x)$$

saadaan kohdasta (e):

x	**–1**	**1**	**2**
$\mathrm{E}(Y\mid X = x)$	–1/2	1	3

Esimerkiksi:

$$\mathrm{E}(Y \mid X = -1) = \sum_y y\,\Pr(Y = y \mid X = -1) = -2\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} + 3\times 0 = -\frac{1}{2}.$$

Esimerkki 6.3

Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y yhteistiheysfunktio

$$f(x, y) = C(x + y)\ ,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$$

missä C on vakio. Määrää:

(a) Vakio C.

(b) $\Pr(X \ge Y)$

(c) Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat. Ovatko X ja Y riippumattomia?

(d) Satunnaismuuttujan X ehdollinen tiheysfunktio Y:n suhteen.

(e) Ehdollinen odotusarvo $\mathrm{E}(X\mid Y)$.

Esimerkki 6.3 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.3 tarkastellaan jatkuvien satunnaismuuttujien yhteisjakaumaa, ehdollisia jakaumia sekä tunnuslukuja.

Esimerkki 6.3 – Ratkaisu

(a) Koska kaikille jatkuvien kaksiulotteisten jakaumien tiheysfunktioille $f_{XY}(x, y)$ *pätee*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dydx \equiv 1 \,,$$

niin saamme vakion C määräämiseksi yhtälön

$$\begin{aligned}
C\int_0^1\int_0^1 (x+y)dydx &= C\int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 dx \\
&= C\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx \\
&= C\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 \\
&= C\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = C = 1
\end{aligned}$$

Ratkaisuksi saadaan

$C = 1$.

Siten satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$f(x, y) = x + y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

(b) Integroimalla saadaan:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X \ge Y\right) &= \int_0^1\int_0^x (x+y)dydx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on yhteistiheysfunktion reunatiheysfunktio

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

Vastaavalla tavalla satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2}.$$

Satunnaismuuttujat X ja Y *eivät ole riippumattomia*, koska

$$f_X(x) f_Y(y) = xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \neq x + y = f_{XY}(x, y).$$

(d) Satunnaismuuttujan X *ehdollinen tiheysfunktio* Y:n suhteen on

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y)}{2y+1}.$$

Satunnaismuuttujan X ehdollinen tiheys ehdolla $Y = y$ *riippuu* y:stä, jolloin esimerkiksi myös sen ehdollinen odotusarvo riippuu y:stä. Tämä on ymmärrettävää, koska satunnaismuuttujat X ja Y *eivät ole riippumattomia*.

(e) Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo*, kun ehtomuuttujana on Y, on

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X|Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^1 x \frac{2(x+y)}{(2y+1)}\,dx \\
&= \frac{2}{2y+1}\int_0^1 (x^2 + xy)\,dx \\
&= \frac{2}{2y+1}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{3y+2}{2y+1}
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla $Y = y$ eli satunnaismuuttujan X *regressiofunktio Y:*n suhteen *riippuu y*:stä. Tämä on ymmärrettävää, koska X ja Y *eivät ole riippumattomia*.

Esimerkki 6.4

Olkoon diskreetin satunnaisvektorin (X, Y) pistetodennäköisyysfunktio

$$\Pr(X = +1,\ Y = 0) = \Pr(X = 0,\ Y = +1) = \Pr(X = -1,\ Y = 0) = \Pr(X = 0,\ Y = -1) = 1/4.$$

(a) Ovatko X ja Y lineaarisesti korreloituneet?

(b) Ovatko X ja Y tilastollisesti riippuvat?

Selitä saamasi tulos.

Esimerkki 6.4 – Mitä opimme?

Riippumattomat satunnaismuuttujat ovat aina lineaarisesti korreloimattomia, mutta lineaarisesta korreloimattomuudesta ei välttämättä seuraa tilastollinen riippumattomuus.

Esimerkki 6.4 – Ratkaisu

Satunnaisvektorin (X,Y) *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x \text{ ja } Y = y)$$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

p_{xy}	-1	0	1	$p_{\cdot y}$
1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
-1	0	1/4	0	1/4
$p_{x\cdot}$	1/4	1/2	1/4	1

(a) Todetaan ensin, että

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0.$$

Siten satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi on

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_x \sum_y (x - \mathrm{E}(X))(y - \mathrm{E}(Y))\Pr(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy \Pr(X = x, Y = y) \\ &= \frac{1}{4}\big[(+1)\times 0 + 0\times(+1) + (-1)\times 0 + 0\times(-1)\big] = 0\end{aligned}$$

Koska kovarianssi on nolla, on myös X:n ja Y:n Pearsonin korrelaatiokerron nolla. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat siten *lineaarisesti korreloimattomia*.

(b) X ja Y ovat *silti tilastollisesti riippuvat*, koska esimerkiksi

$$\Pr(X=1,Y=1) = 0 \quad \text{mutta} \quad \Pr(X=1)\Pr(Y=1) = 1/16.$$

Selitys:

Tilastollisesti riippumattomat satunnaismuuttujat ovat aina lineaarisesti korreloimattomia, mutta *myös tilastollisesti riippuvat satunnaismuuttujat voivat olla lineaarisesti korreloimattomia*, jos satunnaismuttujien välinen riippuvuus on luonteeltaa *epälineaarista*.

Tämän tehtävän tapauksessa satunnaisvektorin (X,Y) arvot ovat yksikköympyrän

$$x^2 + y^2 = 1$$

kehällä.

Esimerkki 6.5

Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa seuraavin parametrein:

$$\mathrm{E}(X) = -1 \qquad \mathrm{E}(Y) = +1$$
$$\mathrm{Var}(X) = 4 \qquad \mathrm{Var}(Y) = 25$$
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = -5$$

Määrää:

(a) Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat.

(b) Pearsonin korrelaatio Cor(X, Y).

(c) Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma Y:n suhteen.

(d) Satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma X:n suhteen.

Esimerkki 6.5 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.5 tarkastellaan *kaksiulotteisen normaalijakauman* ominaisuuksia.

Esimerkki 6.5 – Ratkaisu

Oletuksen mukaan

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = -1 \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y = +1$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = 4 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 = 25$$
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = -5$$

(a) Koska satunnaisvektori (X, Y) noudattaa *kaksiulotteista normaalijakaumaa*, niin satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat ovat normaalijakautuneita:

$$X \sim \mathrm{N}(\mathrm{E}(X), \mathrm{Var}(X))$$

missä

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = -1 \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = 4$$

ja

$$Y \sim \mathrm{N}(\mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(Y))$$

missä

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = +1 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 = 25$$

(b) Määritelmän mukaan satunnaismuuttujien X ja Y *Pearsonin korrelaatiokerroin* on

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-5}{2\times 5} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

(c) Koska satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, niin satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma Y:n suhteen on normaalijakauma:

$$X|Y \sim \mathrm{N}(\mathrm{E}(X|Y), \mathrm{Var}(X|Y)).$$

Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo on ehtomuuttujan Y arvojen funktiona lineaarinen:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \mu_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) = -1 - \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}(y-1) = -\frac{1}{5}y - \frac{4}{5}.$$

Vaikka satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo Y:n suhteen riippuu ehtomuuttujan Y arvoista (koska $\rho_{XY} \neq 0$), niin satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi Y:n suhteen ei riipu ehtomuuttujan arvoista:

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = (1 - \rho_{XY}^2)\sigma_X^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)4 = \frac{3}{4}\times 4 = 3.$$

(d) Koska satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, niin satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma X:n suhteen on normaalijakauma:

$$Y|X \sim \mathrm{N}(\mathrm{E}(Y|X), \mathrm{Var}(Y|X))$$

Kaksiulotteisen normaalijakauman tapauksessa Y:n ehdollinen odotusarvo X:n suhteen on X:n arvojen funktiona lineaarinen:

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}(x+1) = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Vaikka satunnaismuuttujan *Y* ehdollinen odotusarvo *X* :n suhteen riippuu ehtomuuttujan arvoista (koska $\rho_{XY} \neq 0$), niin satunnaismuuttujan *Y* ehdollinen varianssi ei riipu ehtomuuttujan arvoista:

$$\mathrm{Var}(Y \mid X = x) = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2 = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)25 = \frac{3}{4}\times 25 = \frac{75}{4} = 18.75.$$

Esimerkki 6.6

Oletetaan, että satunnaisvektori (*X*, *Y*) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa parametrein

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E}(X) = 2 & \mathrm{E}(Y) = 5 \\ \mathrm{Var}(X) = 25 & \mathrm{Var}(Y) = 4 \\ \mathrm{Cov}(X,Y) = 8 & \end{array}$$

Määrää:

(a) Pearsonin korrelaatiokerroin Cor(*X*, *Y*).

(b) Satunnaismuuttujan *Y* ehdollinen odotusarvo *X*:n suhteen.

(c) Satunnaismuuttujan *X* ehdollinen varianssi *Y*:n suhteen.

Esimerkki 6.6 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.6 tarkastellaan *kaksiulotteisen normaalijakauman* ominaisuuksia.

Esimerkki 6.6 – Ratkaisu

(a) Satunnaismuuttujien *X* ja *Y Pearsonin korrelaatiokerroin* on

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{8}{5\times 2} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

(b) Satunnaismuuttujan *Y ehdollinen odotusarvo*, kun ehtomuuttujana on *X*, on

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) = 5 + \frac{4}{5}\times\frac{2}{5}(x-2) = \frac{8}{25}x + \frac{109}{25}.$$

Satunnaismuuttujan *Y* ehdollinen odotusarvo *X*:n suhteen on *lineaarinen*.

(c) Satunnaismuuttujan X *ehdollinen varianssi*, kun ehtomuuttujana on Y, on

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2 = \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)25 = \frac{9}{25}\times 25 = 9.$$

Satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi *ei riipu* ehtomuuttujan Y arvoista.

Esimerkki 6.7

Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa parametrein

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = 1 \qquad \mu_Y = \mathrm{E}(Y) = -1$$
$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = 1 \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = 1$$
$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = 0.8$$

(a) Määritä satunnaisvektorin (X, Y) kovarianssimatriisi.

(b) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat.

(c) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y ehdolliset jakaumat toistensa suhteen.

Esimerkki 6.7. – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.7 tarkastellaan *kaksiulotteisen normaalijakauman* ominaisuuksia.

Esimerkki 6.7 – Ratkaisu

(a) Koska satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssi* on

$$\sigma_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = 0.8\times 1\times 1 = 0.8,$$

niin satunnaisvektorin (X, Y) *kovarianssimatriisi* on

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat ovat *yksiulotteisia normaalijakaumia*:

$$Y:\ \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) = \mathrm{N}(-1,1)$$
$$X:\ \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2) = \mathrm{N}(1,1)$$

(c) Satunnaismuuttujan Y *ehdollinen jakauma X:*n suhteen on *yksiulotteinen normaalijakauma*:

$$(Y \mid X):\ \mathrm{N}(\mu_Y + \beta_{YX}(x-\mu_X)\,,\, \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2))\,,\ \beta_{YX} = \sigma_Y\rho_{XY}/\sigma_X$$

Koska

$$\beta_{YX} = \sigma_Y\rho_{YX}/\sigma_X = 1\times 0.8/1 = 0.8,$$

niin

$$E(Y \mid X) = \mu_Y + \beta_{YX}(x - \mu_X) = -1 + 0.8 \times (x - 1).$$

Lisäksi

$$\sigma^2_{Y|X} = \sigma^2_Y(1 - \rho^2_{XY}) = 1 \times (1 - 0.8^2) = 0.36.$$

Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma Y:n suhteen on *yksiulotteinen normaalijakauma*:

$$(X \mid Y): \quad N(\mu_X + \beta_{XY}(y - \mu_Y), \sigma^2_X(1 - \rho^2_{XY})), \beta_{XY} = \sigma_X \rho_{XY} / \sigma_Y$$

Koska

$$\beta_{XY} = \sigma_X \rho_{XY} / \sigma_Y = 1 \times 0.8/1 = 0.8,$$

niin

$$E(X \mid Y) = \mu_X + \beta_{XY}(y - \mu_Y) = 1 + 0.8 \times (y + 1).$$

Lisäksi

$$\sigma^2_{X|Y} = \sigma^2_X(1 - \rho^2_{XY}) = 1 \times (1 - 0.8^2) = 0.36.$$

Ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X)$ määrää *suoran*

$$y = \mu_Y + \beta_{YX}(x - \mu_X) = 0.8x - 1.8$$

Ehdollinen odotusarvo $E(X \mid Y)$ määrää *suoran*

$$x = \mu_X + \beta_{XY}(y - \mu_Y) = 0.8y + 1.8$$

Molemmat suorat kulkevat pisteen

$$(\mu_X, \mu_Y) = (+1, -1)$$

kautta.

Esimerkki 6.8

Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa.

Olkoon

$$5y = 6x - 17$$

satunnaismuuttujan Y regressiosuora satunnaismuuttujan X suhteen ja

$$15x = 8y + 38$$

satunnaismuuttujan X regressiosuora satunnaismuuttujan Y suhteen.

(a) Määrää satunnaismuuttujien Y ja X odotusarvot.

(b) Määrää satunnaismuuttujien Y ja X Pearsonin korrelaatiokerroin.

(c) Määrää satunnaismuuttujan Y ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan X arvojen suhteen, jos satunnaismuuttujan Y varianssi on 9.

(d) Määrää satunnaismuuttujan X varianssi ja ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan Y arvojen suhteen, jos satunnaismuuttujan Y varianssi on 9.

Esimerkki 6.8 – Mitä opimme?

Esimerkissä 6.8 tarkastellaan *kaksiulotteisen normaalijakauman* ominaisuuksia.

Esimerkki 6.8 – Ratkaisu

(a) Koska sekä satunnaismuuttujan Y regressiosuora X:n suhteen että satunnaismuuttujan X regressiosuora Y:n suhteen kulkevat odotusarvojen

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

määräämän pisteen (μ_X, μ_Y) kautta, saadaan odotusarvot määräämällä suorien

$$5y = 6x - 17$$

$$15x = 8y + 38$$

leikkauspiste. Tämä piste on (2, –1), joten

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = -1,$$

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = 2.$$

(b) Suorien yhtälöistä nähdään, että

$$\beta_{YX} = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{6}{5}$$

$$\beta_{XY} = \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{8}{15}$$

Siten satunnaismuuttujien Y ja X *Pearsonin korrelaatiokertoimen neliö* on

$$\rho_{XY}^2 = \beta_{YX}\beta_{XY} = \frac{6}{5}\times\frac{8}{15} = \frac{48}{75} = 0.64\,,$$

joten satunnaismuuttujien Y ja X *Pearsonin korrelaatiokerroin* on

$$\rho_{XY} = 0.8\,.$$

Korrelaatiokerroin on *positiivinen*, koska regressiosuorien kulmakertoimet β_{YX} ja β_{XY} ovat positiivisia.

(c) Koska

$$\sigma_Y^2 = 9\,,$$

niin satunnaismuuttujan Y *ehdollinen varianssi* satunnaismuuttujan X arvojen suhteen on

$$\sigma_{Y|X}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2 = (1-0.64)\times 9 = 3.24\,.$$

Huomaa, että satunnaismuuttujan Y ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan X arvojen suhteen on *vakio* eli se ei riipu ehtomuuttujan X arvoista.

(d) Tehtävän asettelun mukaan

$$\beta_{XY} = \frac{8}{15},$$

(b)-kohdan mukaan

$$\rho_{XY} = 0.8\,,$$

ja lisäksi olemme olettaneet, että

$$\sigma_Y^2 = 9\,.$$

Koska

$$\beta_{XY} = \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,,$$

niin saamme yhtälön

$$\frac{8}{15} = 0.8\times\frac{\sigma_X}{3}\,,$$

josta satunnaismuuttujan X *keskihajonta* σ_X saadaan ratkaisuksi. Ratkaisuksi saadaan

$$\sigma_X = 2\,.$$

Siten satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\sigma_X^2 = 4\,.$$

Satunnaismuuttujan X *ehdollinen varianssi* muuttujan Y arvojen suhteen on

$$\sigma_{X|Y}^2 = (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2 = (1-0.64)\times 4 = 1.44\,.$$

Huomaa, että satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan Y arvojen suhteen on *vakio* eli se ei riipu ehtomuuttujan y arvoista.