MALLIRATKAISUT, MATRIISILASKENTA, MS-A0002

- Laskuvirheestä tulee 0,5 pisteen vähennys.
- Jos laskuvirhe vaikuttaa seuraavien askelien laskut, voi silti saada lopputehtävästä täydet pisteet, paitsi jos laskuvirhe on aiheuttanut tehtävän luonteen muutosta.
- Epätäydellisestä supistuksesta (esim jos vastataan $\sqrt{49}$ tai $3! + 1$ kun oikea vastaus olisi 7) tulee 0,5 pisteen vähennys.
- Epäselvästä (mutta pääasiassa oikeasta) perustelusta tulee 1 pisteen vähennys per tehtävä. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.

Tehtävä 1

Olkoon A $(n \times n)$-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $0, 1, 2, \dots, n-1$. Vasta jokaiselle alla olevalle lauseelle, onko se vältämättä tosi, vältämättä epätosi, vai saattaako se olla joko tosi tai epätosi.

a) A on käännettävä.
b) A on diagonalisoitava.
c) Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on äärettömän monta ratkaisua.
d) Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ on äärettömän monta ratkaisua.

Ratkaisu 1

a) **Epätosi**, sillä matriisilla Aon ominaisarvo 0, eli on degeneroitunut. (1p)
b) **Tosi**, sillä matriisilla A on n *eri* ominaisarvoa, eli n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. (1p)
c) **Tosi**, jokainen ominaisvektori jolla on ominaisarvo 0 on yhtälön ratkaisu. (1p)
d) **Tosi**, jokainen ominaisvektori jolla on ominaisarvo 1 on yhtälön ratkaisu. (1p)

Tehtävä 2

Tutkitaan avaruudessa oleva kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ja $(0, 0, 3)$. Laske tämän kolmion pinta-ala.

Ratkaisu 2A

Merkitään $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ ja $R = (0, 0, 3)$. Tutkitaan paikkavektorit $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\vec{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.(1p) (Voidaan tietysti näiden sijaan valita jokin paikkavektoreista $\vec{QP}$, $\vec{RP}$, $\vec{QR}$, $\vec{RQ}$)

Etsitty kolmion pinta-ala on *puoli* suunnikkaan pinta-ala, jonka kaksi särmää ovat $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\vec{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. (0,5p)

Tämän suunnikkaan pinta-ala on $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$ (0,5p)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1p)$$

Siispä kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 9 + 4} = \frac{7}{2}. \ (1p)$$

Ratkaisu 2B

Merkitään $P = (1,0,0)$, $Q = (0,2,0)$ ja $R = (0,0,3)$. Piiretään korkeus pisteestä R janaan PQ, eli etsitään piste M janalla PQ siten, että $\vec{PQ} \perp \vec{RM}$. (1p) (Voiddan tietysti yhtä hyvin piirtää korkeuden mistä tahansa kulmasta, vastakkaiseen janaan.)

Tällöin pätee $M = (t, 2-2t, 0)$ jollekin t (0,5p)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{PQ} \perp \vec{RM} = \begin{pmatrix} t \\ 2-2t \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (0,5p)}$$

joten

$$0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 2-2t \\ -3 \end{pmatrix} = 4 - 5t \text{ (0,5p)}$$

eli $t = \frac{4}{5}$, och $M = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0)$. (0,5p)

Kolmion pinta-ala on siis

$$\frac{1}{2}\|\vec{PQ}\|\|\vec{RM}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{1}{5}\sqrt{4^2+2^2+15^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{245} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{5 \cdot 49} = \frac{7}{2} \text{ (1p)}$$

Tehtävä 3

Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Etsi kaikki sellaiset matriisit B, että $AB = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu 3

Jotta dimensiot täsmäävät, on B:n oltava 3×2-matriisi:

$$B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \text{ (0,5p)}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a & -3b & +c & & & & = -4 \\ -3a & +5b & +c & & & & = 8 \\ & & & d & -3e & +f & = -8 \\ & & & -3d & +5e & +f & = 12 \end{cases} \text{ (1p)}$$

Kirjoitetaan liittomatriisina (0,5p) ja Gauss-eliminoidaan (väliaskelia vaaditaan) (1p)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Saadaan vapaat muuttujat c, f ja yhtälöt

$$\begin{cases} a & = 2c - 1 \\ b & = c + 1 \\ d & = 2f + 1 \\ e & = f + 3 \end{cases}. \text{ (0,5p)}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$B = \begin{pmatrix} 2c-1 & 2f+1 \\ c-1 & f+3 \\ c & f \end{pmatrix} \text{ (0,5p)}$$

Tehtävä 4

Näytä että vektorit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Esitä luonnolliset kantavektorit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tässä kannassa.

Ratkaisu 4

3 vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^3$ muodostavat kannan jos ja vain jos ne ovat käännettävän matriisin sarakkeet. (1p jos on *kirjoitettu* tämä, tai jokin muu "laskettavissa oleva" ehto kannan muodostamiseen, esim "determinantti on $\neq 0$", "yhtälöllä $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ ei ole epätriviaalia ratkaisua", jne...)

Käännetään siis matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ Gausseliminaatiolla (väliaskelia vaaditaan) (2p) liittomatriisilla

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{2} & 4 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

(1p jos on *laskettu* jokin muu ehto kannan muodostamiseen.)

Luonnolliset kantavektorit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ esitetty kannassa $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ovat sarakkeet kannanvaihtomatriisissa

$$E_B = B_E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ \frac{-5}{2} & 4 & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Siispä

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 & = 3\mathbf{b}_1 - \frac{5}{2}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{e}_2 & = -3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 \quad (1\text{p}) \\ \mathbf{e}_3 & = \mathbf{b}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 \end{cases}$$

Tehtävä 5

Olkoon $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 + x_4\}$

a) Kirjoita V jonkin matriisin nollaavaruutena (eli ytimenä).
b) Etsi avaruuden V kanta.
c) Kirjoita V jonkin matriisin sarakeavaruutena.
d) Etsi vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ projektio avaruuteen V.

Ratkaisu 5

a) Jos kirjoitetaan yhtälöt homogeenisesti: $\begin{cases} x_1 & -x_2 & & & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$ saadaan

$$V = \left\{\mathbf{x} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (1p).}$$

Huom: Matriisi voiddan valita monella eri tavalla. Esimerkkiksi jokin rivistä voidaan vaihtaa rivivektoriksi $(1\,0\,-1\,-1)$, rivit voivat vaihtaa paikkaa, ja toinen tai molemmat rivit voivat vaihtaa etumerkkiä.

b) Parameterimuodossa saadaan vapaat muuttujat $x_3 = s$, $x_4 = t$ja "kiinteät" muuttujat $x_2 = x_1 = s + t$. Vektorimuodossa tämä kirjoitetaan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0{,}5\text{p}).$$

Kanta on siis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (0{,}5\text{p}).$$

c) Sarakeavaruuden määritelmästä + osatehtävästä (b) saadaan suoraan

$$V = \mathcal{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1\text{p}).$$

Huom: Matriisi voiddan valita monella eri tavalla. Esimerkkiksi jokin sarakkeesta voidaan vaihtaa sarakevektoriksi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sarakkeet voivat vaihtaa paikkaa, ja toinen tai molemmat sarakkeet voivat vaihtaa etumerkkiä.

d) Jos kirjoitetaan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ saadaan projektioksi $A\mathbf{x}$, jossa vektorille $\mathbf{x}$ pätee normaaliyhtälö $A^T A\mathbf{x} = A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Laskuista saa

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (0{,}5\text{p}),$$

joten $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, joten projektio on

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (0{,}5\text{p}). \end{aligned}$$