Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-C1110 Automaatio- ja systeemitekniikan perusteet

Luento 6

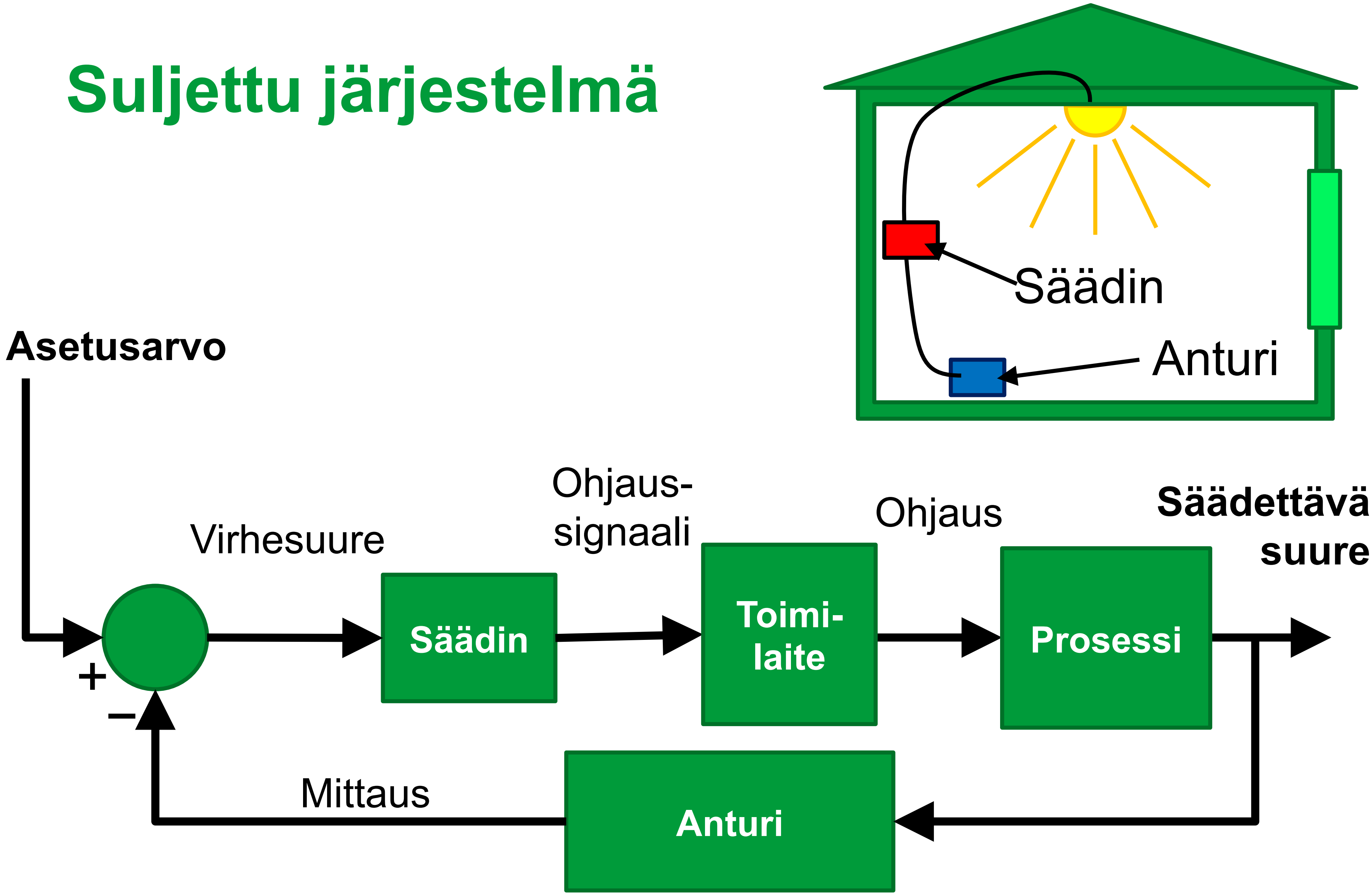
PID-säädin, värähtely, stabiilisuus

Joni Pajarinen 27.2.2023

Tämän luennon aiheet

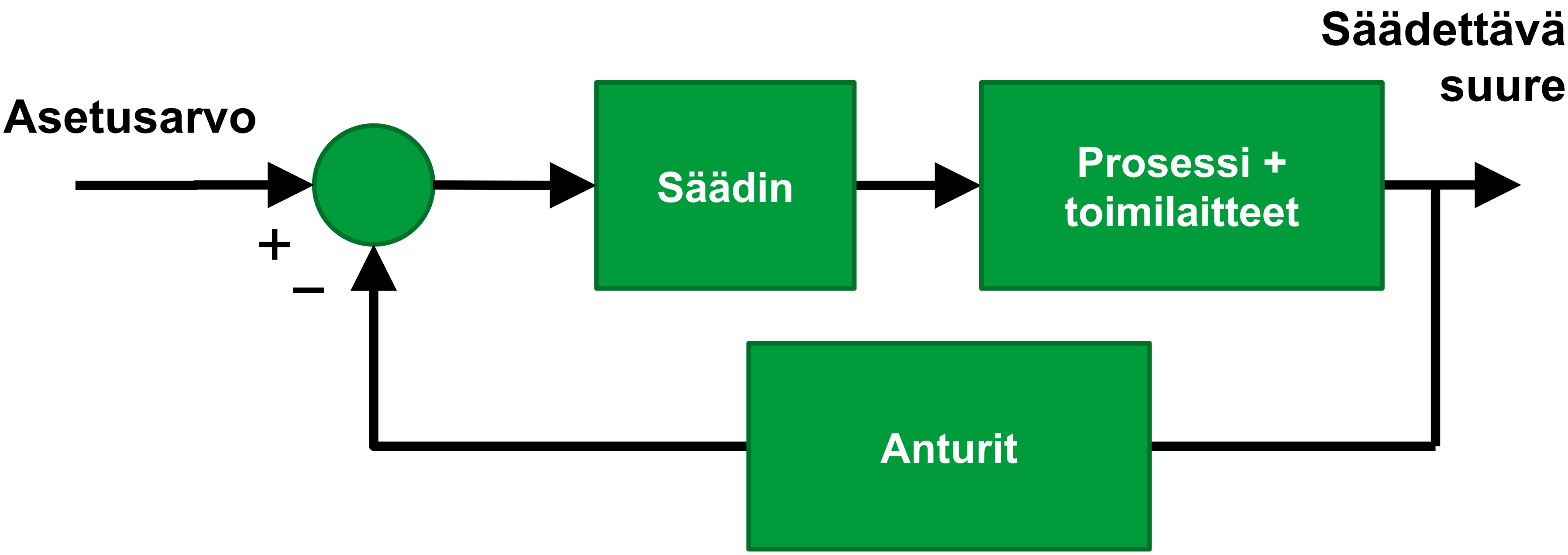
- Säädön periaate
- Dynaamiset ominaisuudet
- On-off-säätö
- P-, PD-, PI-, ja PID-säätimet
- Järjestelmän stabiilius ja värähtely

Suljettu järjestelmä

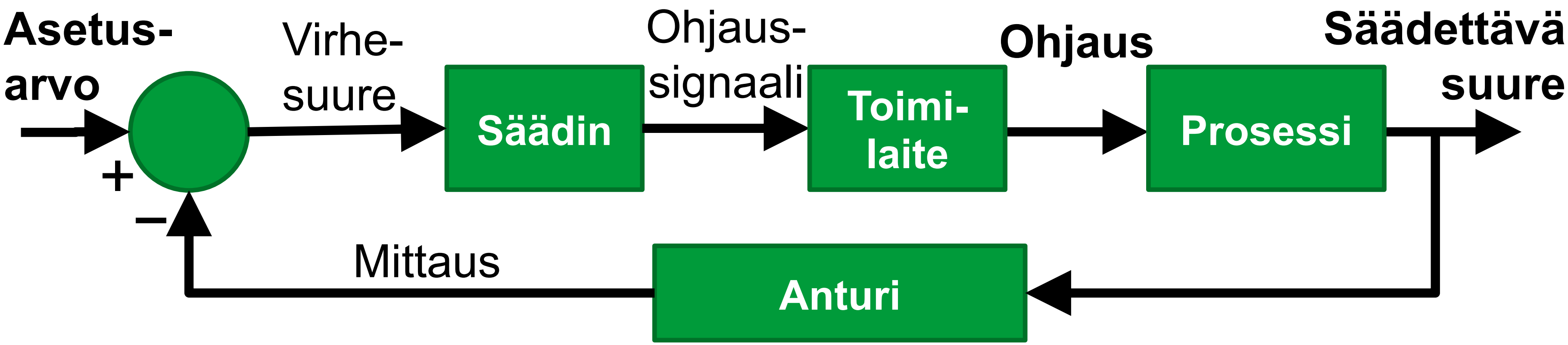


Yksinkertaistettu suljetun järjestelmän lohkokaavio

- Sisällytetään toimilaitteet ja prosessi samaan lohkoon

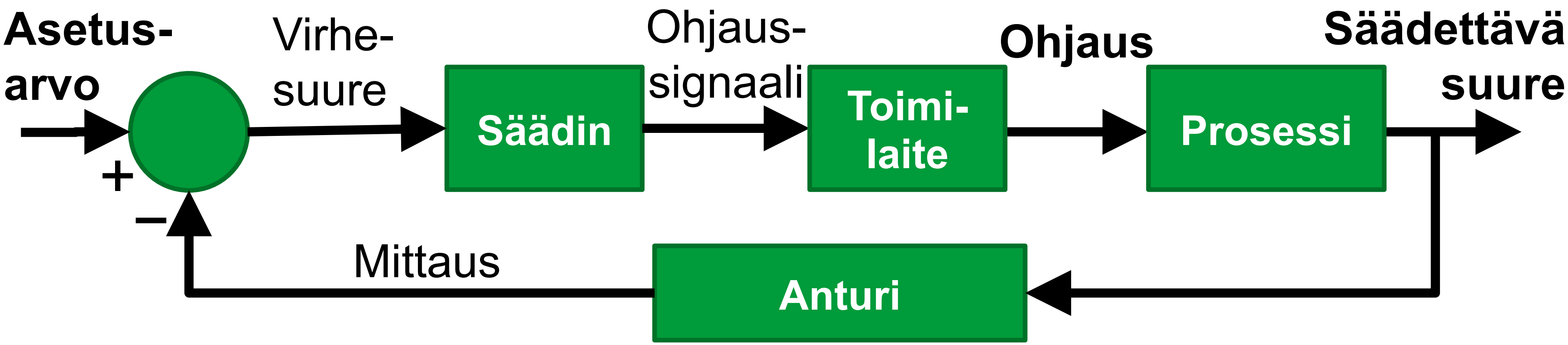


Säätimet

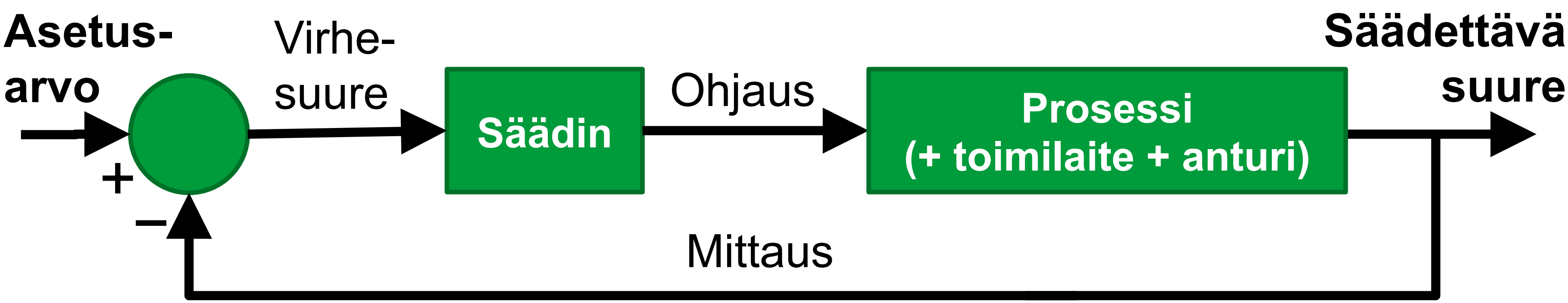


- Tavoitteena säädössä saada **säädettävän suureen** arvo samaksi kuin **asetusarvo** säätämällä prosessin **ohjausta**
- Ohjaus voi olla erityyppinen suure kuin säädettävä suure
  - Esim: säädettävä suure = säiliön veden pinnan korkeus, ohjaus = säiliön sisäänvirtausta säätelevän venttiilin asento

Säätimet



- Toisinaan toimilaitteet ja/tai anturit sisällytetään prosessi-lohkoon:

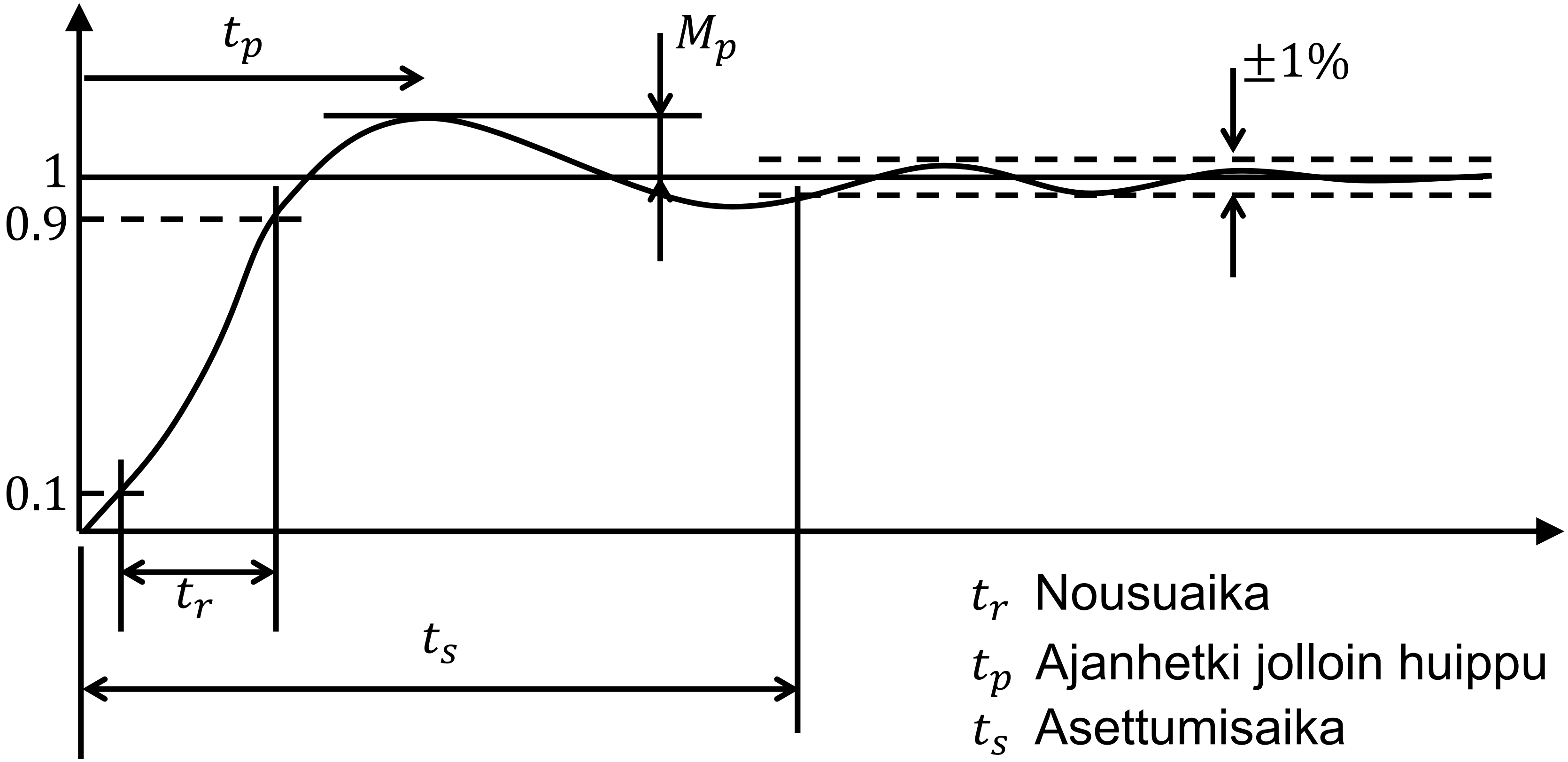


Säädön tavoitteet

- Asetusarvosäätö
  - Asetusarvo ei muutu, säätimen tehtävä on kompensoida häiriöt
  - Esim. kemianteollisuuden valmistusprosessit
- Servosäätö
  - Prosessin halutaan seuraavan asetusarvon muutoksia tarkasti
  - Esim. moottorilla tehtävä asennon säätö

Dynaamiset ominaisuudet aikatasossa

Askelvaste



t_r Nousuaika

t_p Ajanhetki jolloin huippu

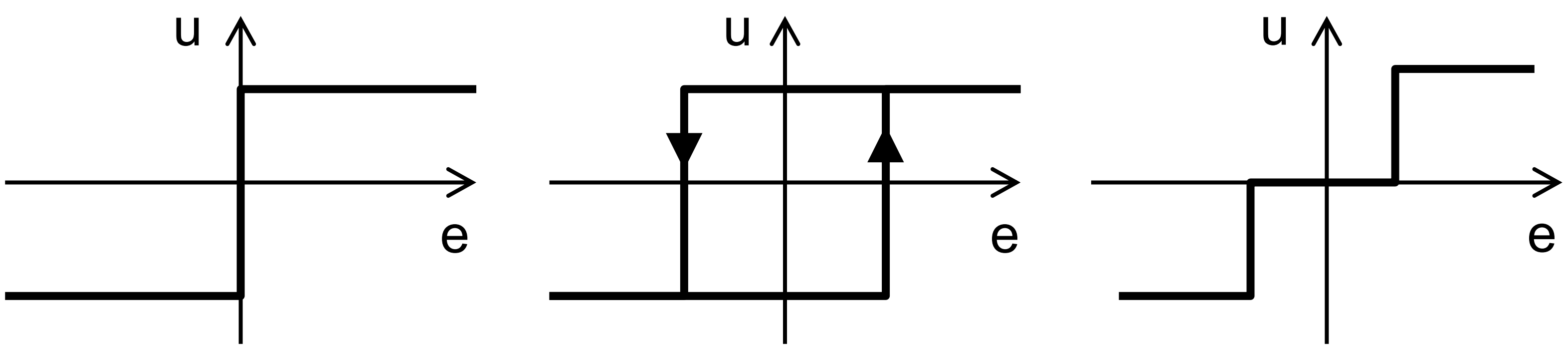
t_s Asettumisaika

M_p Ylitys

Jatkuvan ajan virhe

Yksinkertaisin säädin: on-off -säätö

- Voidaan esimerkiksi säätää tuloventtiiliä ainoastaan päälle tai pois
- Ohjausvirran kytkeminen ei vaadi monimutkaista elektroniikkaa
- Prosessin ohjaaminen voi olla epätarkkaa
- Erilaisia on-off -säätimiä:



Puhdas reletyyppi

Rele, jossa hystereesi

Rele, jossa kuollut alue (ns. kolmipistesäätö)

Prosessin säätö analogisesti ohjattavalla toimilaitteella

- Jos toimilaite voidaan ohjata muihin tiloihin kuin vain päälle tai pois, kannattaa käyttää monimutkaisempaa säädintä
- Toimilaitteen ohjaussignaali voi saada muitakin kuin on / off arvoja

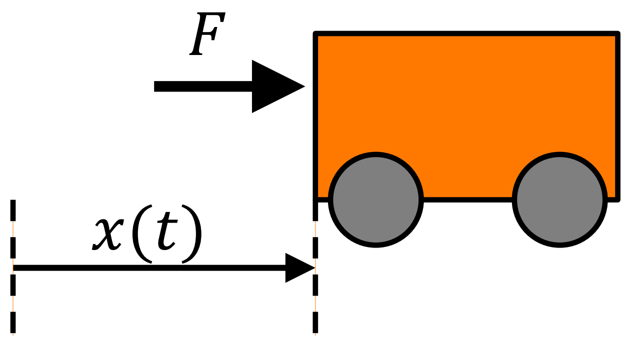
Tarkastellaan säädintä kärryesimerkin avulla

- Kärry, jonka sijainti on $x(t)$, nopeus $\dot{x}(t)$ ja kiihtyvyys $\ddot{x}(t)$
- Voimasta F johtuva kiihtyvyys a saadaan suoraan Newtonin 2. laista

$$a = \frac{F}{m}$$

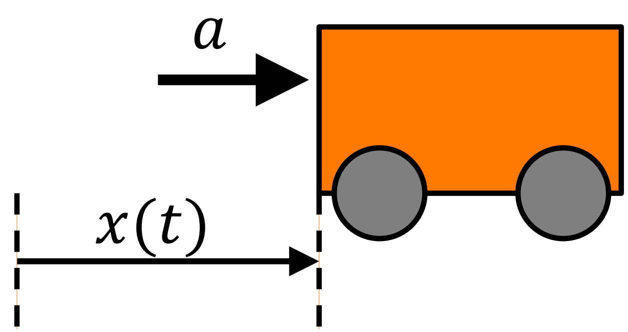
- Differentiaaliyhtälö systeemille matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a$$



P-säädin

- Binäärisen (on/off) säätimen jälkeen yksinkertaisin mahdollinen säädin on P-säädin
- Säädin ohjaa prosessia skaalaamalla asetusarvon ja mittauksen erotusta $e(t)$ vakiokertoimella k_P



- Syöte prosessille asetusarvon ja mittauksen funktiona:

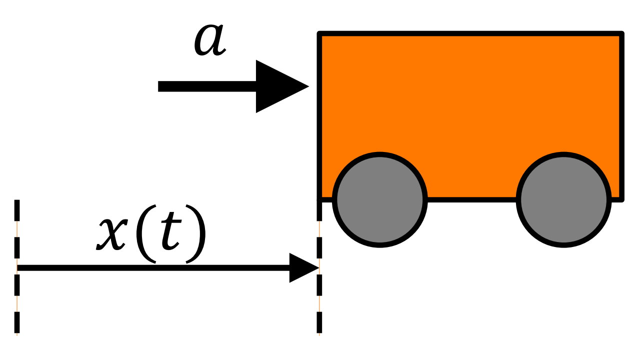
$$a = k_P e(t) = k_P\left(x_{\mathrm{ASETUS}}(t) - x(t)\right)$$

Tarkastellaan säädintä kärryesimerkin avulla

- Halutaan ajaa lähtösijainnista $x(0)$ sijaintiin $x_{\text{ASETUS}}(t) = 0$
- Miten valita kiihtyvyys a ?
- Yritetään minimoida virhearvio = asetusarvo – nykyarvo:

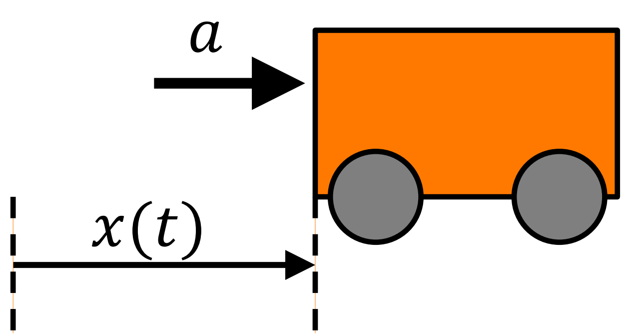
$$e(t) = 0 - x(t)$$

- Valitaan $a = k_P e(t) = -k_P x(t)$
- Tätä kutsutaan P-säätimeksi
- P: ”proportional”, säätö suhteellinen virheeseen
- Lisätään P-säädin prosessiin:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k_P x(t) \end{bmatrix}$$

P-säädin kärryesimerkissä

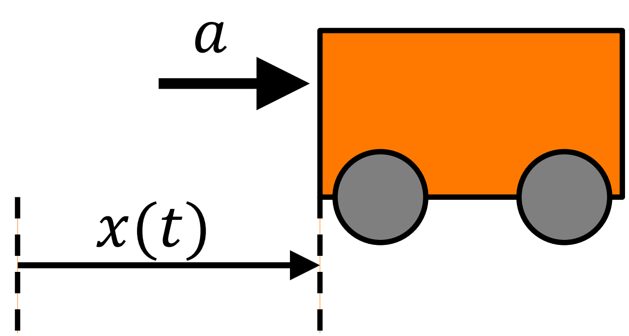


- Ajetaan sijaintiin $x(t) = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k_P x(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -k_p x(t) \end{bmatrix} \rightarrow \ddot{x}(t) = -k_P x(t)$$

P-säädin kärryesimerkissä: ratkaistaan differentiaaliyhtälö



- Ajetaan sijaintiin $x(t) = 0$
- $\ddot{x}(t) = -k_P x(t)$
- Differentiaaliyhtälön ratkaisu:

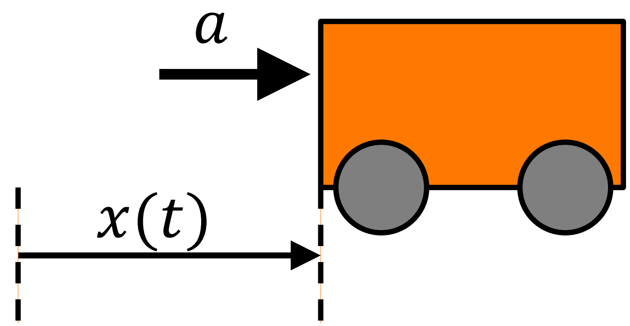
  $x(t) = c_1 \sin(\sqrt{k_P} t) + c_2 \cos(\sqrt{k_P} t)$
- Nopeus $\dot{x}(t) = \sqrt{k_P}\left(c_1 \cos(\sqrt{k_P} t) - c_2 \sin(\sqrt{k_P} t)\right)$
- Ratkaistaan c_1 ja c_2 käyttämällä alkusijaintia $x(0)$ ja lähtönopeutta $\dot{x}(0)$:

$$x(t) = c_1 \sin(\sqrt{k_P} t) + x(0) \cos(\sqrt{k_P} t)$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{k_P}\left(\dot{x}(0)/\sqrt{k_P} \cos(\sqrt{k_P} t) - x(0) \sin(\sqrt{k_P} t)\right)$$

- $c_1 = \dot{x}(0)/\sqrt{k_P}$ ja $c_2 = x(0)$

P-säädin kärryesimerkissä: stabiilisuus



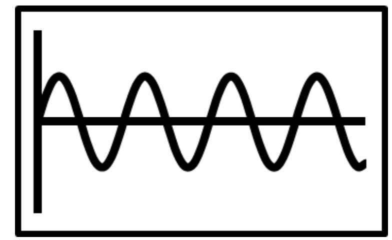
- Kun lähtönopeus $\dot{x}(0) = 0$,

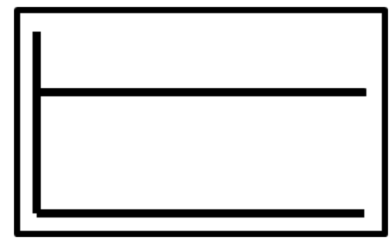
  saadaan $x(t) = x(0)\cos\left(\sqrt{k_P}t\right)$
- Kun $k_P > 0$, $x(t)$ värähtelee / oskilloi
- Kun $k_P = 0$, $x(t)$ on vakio
- Kun $k_P < 0$, $x(t) =$

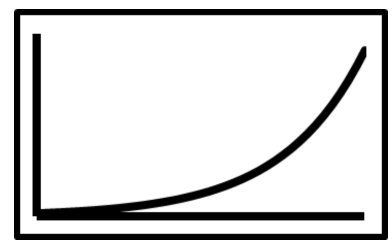
  $x(0)\cos\left(t\sqrt{-k_P}i\right) = \frac{x(0)}{2}\left(e^{-\sqrt{-k_P}\,t} + e^{\sqrt{-k_P}\,t}\right)$

  $\rightarrow x(t)$ kasvaa eksponentiaalisesti

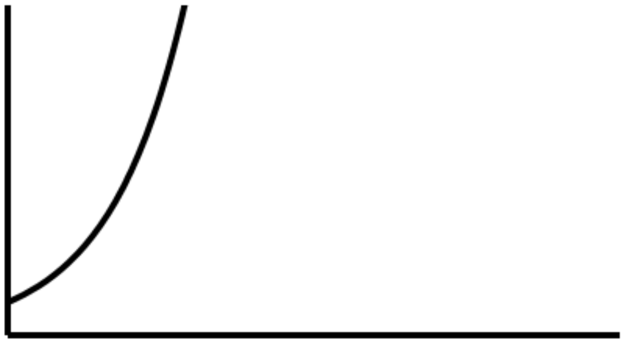
  Systeemi on *epästabiili.*





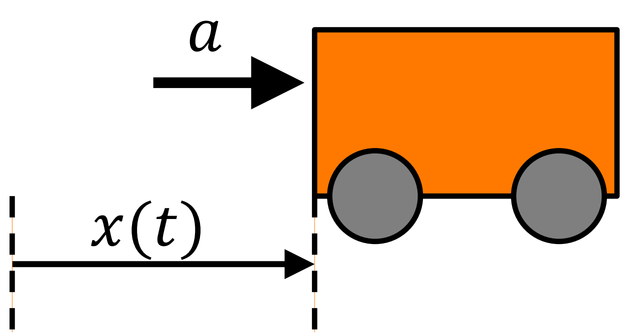


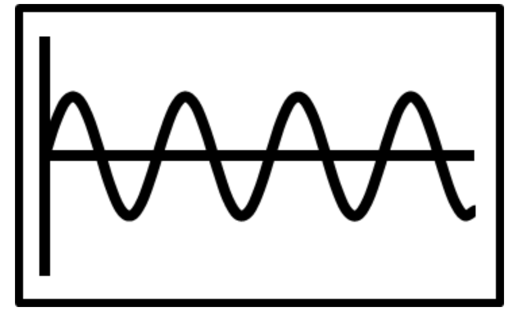
Epästabiilius



- Eksponentiaalinen kasvu
  → epästabiili järjestelmä
- Äärellinen syöte aiheuttaa vasteen, joka karkaa äärettömyyteen
- Esim. moottorin nopeus saattaa kasvaa rajattomasti, veden pinta saattaa valua yli, tms. tms.

Kärryesimerkki: värähtely pois

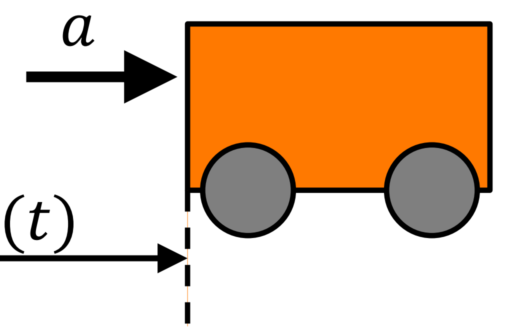




- P-säädin voi aiheuttaa värähtelyä
- Värähtely: kun kärry kiihdyttää nopeus kasvaa kunnes mennään asetusarvon yli ja vasta sitten jarrutetaan
- Miten vähentää nopeutta?
- → Käytetään D-säädintä / derivaatta-säädintä

$$a = k_D \dot{e}(t)$$

PD-säädin kärryesimerkissä



- Halutaan ajaa sijaintiin $x(t) = 0$
- Valitaan $a = k_P e(t) + k_D \dot{e}(t) = -k_P x(t) - k_D \dot{x}(t)$

D-säädin

P-säädin

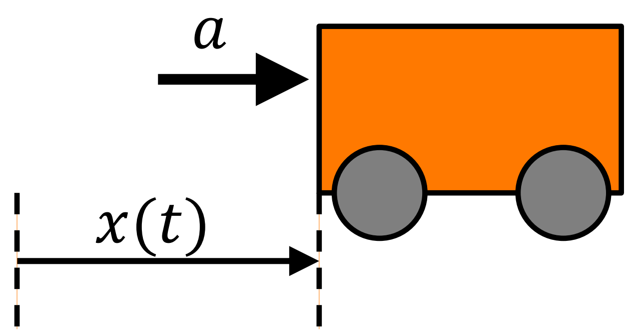
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k_P x(t) - k_D \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_P & -k_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

Yhtälö on muotoa $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$

PD-säädin kärryesimerkissä

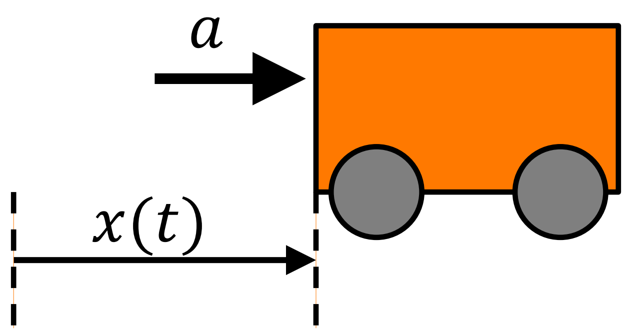


$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_P & -k_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

Yhtälö on muotoa $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$

- Merkitään S:llä matriisia, jossa sarakkeet ovat A:n ominaisvektoreita ja λ_i:llä A:n ominaisarvoja
- Silloin $\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{z}$, missä $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \ldots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

PD-säädin kärryesimerkissä



- Yhtälö $\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_P & -k_D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}$ on muotoa $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$
- A:n ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{{k_D}^2 - 4\,k_P} - k_D\right), \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{{k_D}^2 - 4\,k_P} - k_D\right)$$

- Saadaan $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = S\begin{bmatrix}c_1 e^{\lambda_1 t}\\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix}\frac{1}{2k_P}\left(\sqrt{{k_D}^2 - 4\,k_P} - k_D\right) & \frac{1}{2k_P}\left(-\sqrt{{k_D}^2 - 4\,k_P} - k_D\right)\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

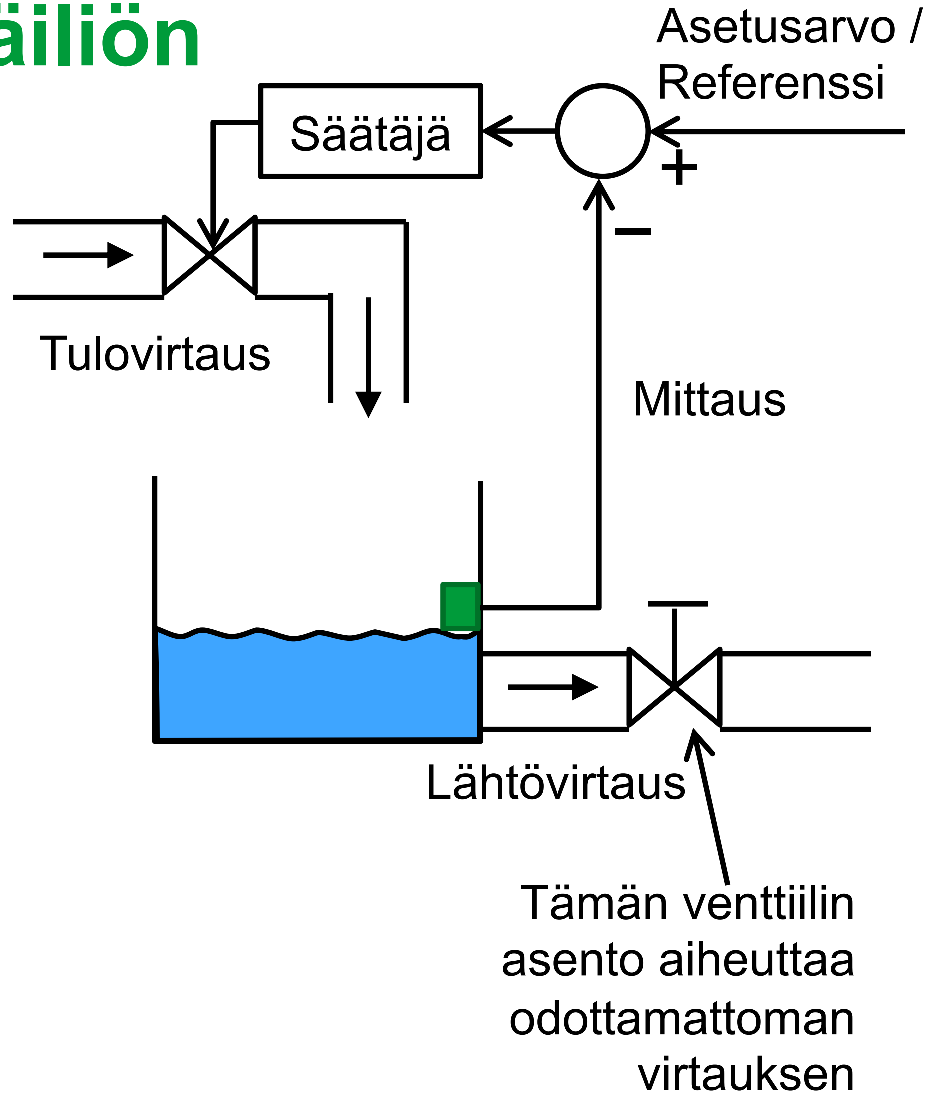
PD-säädin kärryesimerkissä

- $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c_1 e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t} e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_1)t} \\ c_2 e^{\mathrm{Re}(\lambda_2)t} e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_2)t} \end{bmatrix}$
- $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-k_D \pm \sqrt{{k_D}^2 - 4\,k_P}\right)$
- Kun ${k_D}^2 < 4\,k_P$, $\mathrm{Im}(\lambda_{1/2}) \neq 0$. Eulerin kaavalla saadaan $e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_{1/2})t} = cos(\mathrm{Im}(\lambda_{1/2})t) + i\,sin(\mathrm{Im}(\lambda_{1/2})t) \rightarrow$ <u>Värähtelyä</u>
- Kun reaaliosa $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) > 0$, $e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t}$ <u>kasvaa eksponentiaalisesti</u>
- Kun reaaliosa $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = 0$, $e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t}$ <u>on vakio</u>
- Kun reaaliosa $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$, $e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t}$ <u>konvergoi eksponentiaalisesti</u>
- Jos valitaan ${k_D}^2 = 4\,k_P$ ja $k_D > 0$, ei ole värähtelyä ja systeemi konvergoituu asetusarvoon!
- Mutta riittääkö PD-säädin kaikkiin prosesseihin?

Esimerkkiprosessi: säiliön pinnankorkeus

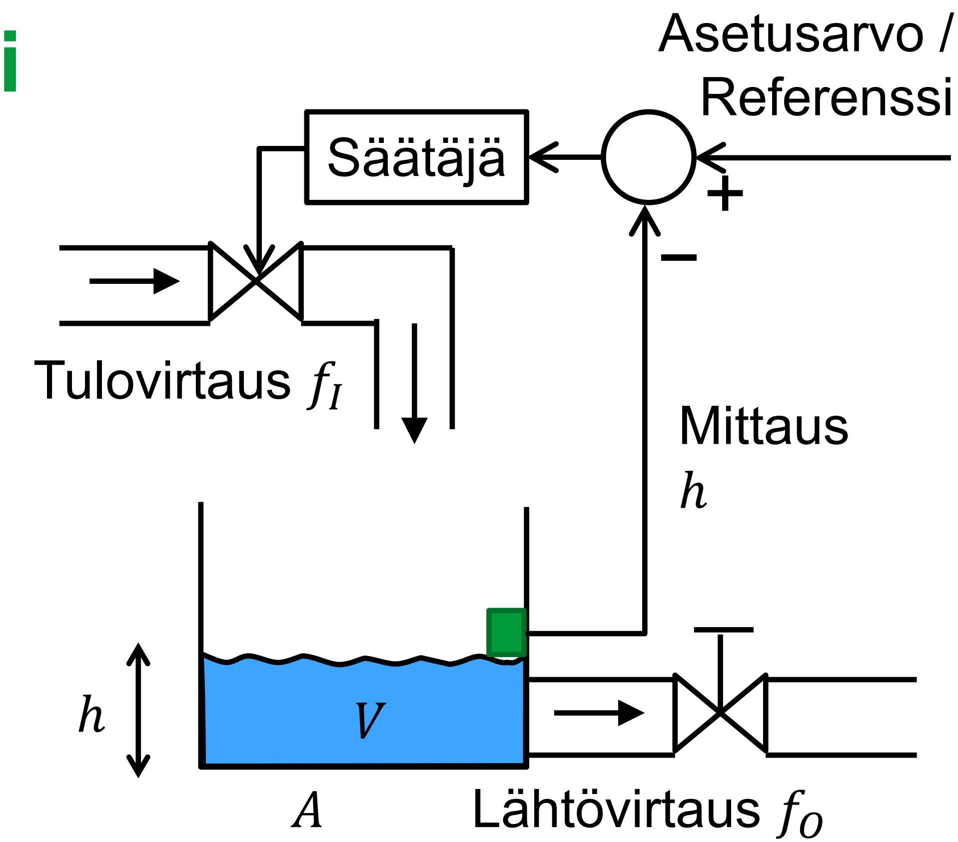
Esimerkkiprosessi: säiliön pinnankorkeus

- Tulovirtauksen venttiiliä pystytään ohjaamaan
- Lähtövirtauksen venttiilin asento aiheuttaa odottamattomia muutoksia pinnankorkeuteen
- Miten pinnankorkeutta pitäisi säätää?
- Riittääkö, että mitataan lähtövirtaus ja asetetaan tulovirtaus samaksi?
- Käytännössä ei toimi koska epätarkkuuksia
- Tarvitaan mittaus pinnankorkeudesta
- Pinnankorkeus = säädettävä suure



Säiliöprosessin malli

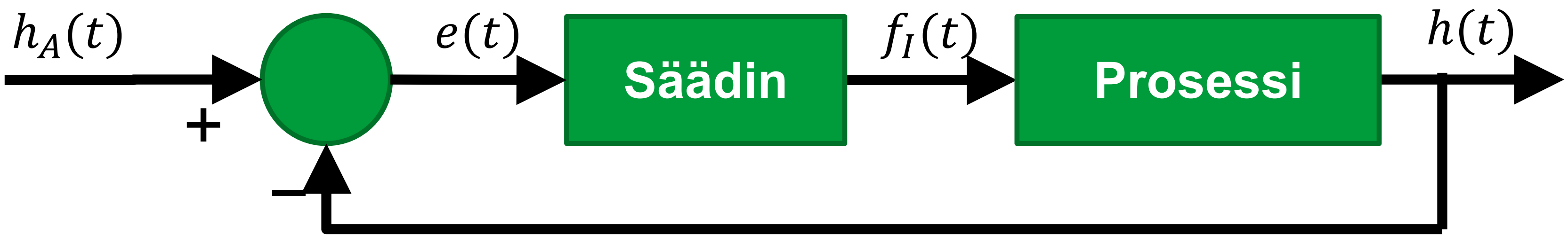
- Lähtövirtaus f_O riippuu pinnan korkeudesta ja lähtöventtiilin asennosta k
- Tulovirtauksen f_I suuruutta voidaan suoraan säätää
- Pinnankorkeudesta h saadaan suoraan mittaus
- Veden pinnankorkeuden muutos riippuu tulovirtauksesta f_I ja lähtövirtauksesta f_O



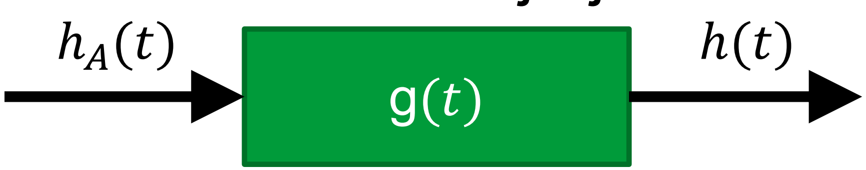
$$f_O = k\sqrt{h}$$

Säiliöprosessin lohkokaavio

- Halutaan malli pinnankorkeuden halutusta arvosta (asetusarvo) todelliseen pinnankorkeuteen, kun käytetään takaisinkytkettyä säätöä
- Suljettua järjestelmää kuvaava lohkokaavioesitys:



- Halutaan siis koko järjestelmän malli:



- Huom! Mittauksen ja venttiilin ohjauksen dynamiikat arvioidaan äärettömän nopeiksi

Säiliöprosessin dynaaminen malli

- Ensin mallinnetaan itse prosessi
- Kirjoitetaan taseyhtälö:
  - Tuleva virtaus – lähtevä virtaus = varastoituva virtaus (ajassa)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt} = f_I - f_O$$

  - (Säiliön poikkipinta-alan A oletetaan olevan vakio)

- Tiedettiin

$$f_O = k\sqrt{h}$$

missä k on poistoventtiilistä riippuva vakio

Säiliöprosessin dynaaminen malli

- Saadaan epälineaarinen esitys

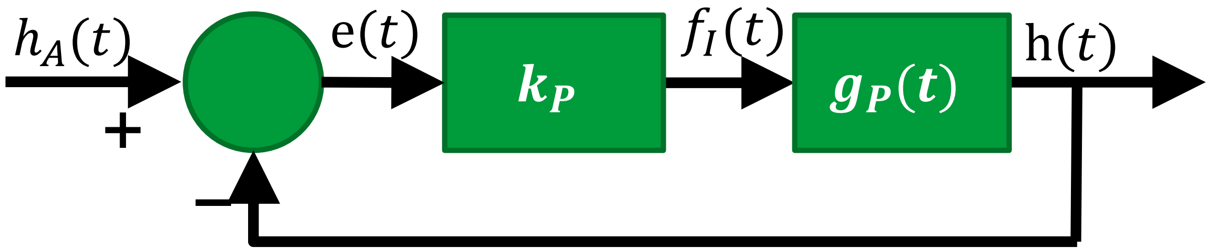
$$A\frac{dh}{dt} = f_I - k\sqrt{h}$$

jossa pinnankorkeus h on systeemin tilaa kuvaava muuttuja ja virtaus f_I on ohjausmuuttuja

- Differentiaaliyhtälö on hankala ratkaista analyyttisesti
- Numeerista integrointia voidaan käyttää

Säiliöprosessi P-säätimellä

- Säädin ohjaa prosessia skaalaamalla asetusarvon ja mittauksen erotusta vakiokertoimella k_p

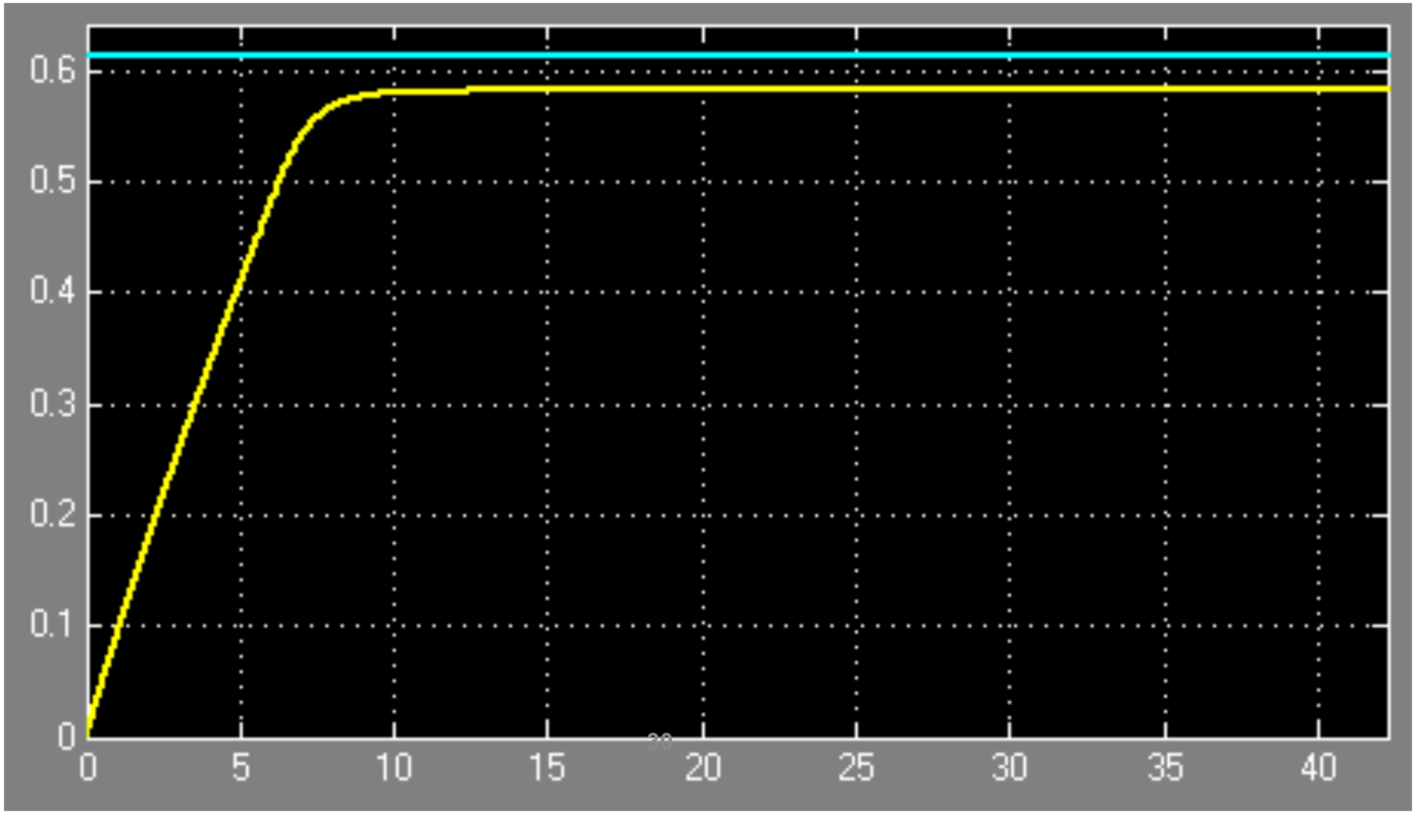


- Syöte prosessille asetusarvon ja mittauksen funktiona:

$$f_I(t) = k_P e(t) = k_P[h_A(t) - h(t)]$$

P-säädin: pysyvä poikkeama

- Jos erosuure $e(t)$ on liian pieni, ei ohjaus välttämättä riitä kompensoimaan virhettä nollaan
- → Jää pysyvä poikkeama

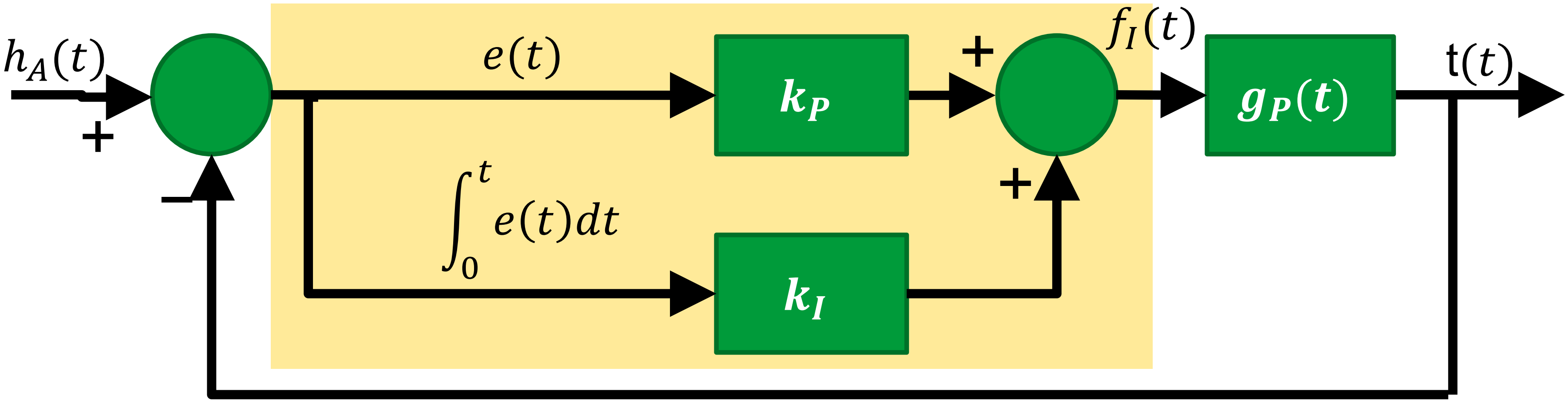


PI-säädin (Proportional + Integral)

- Pysyvä poikkeama aiheuttaa pienen jatkuvan virhesuureen
- Jos tätä pientä virhesuuretta integroidaan, suure kasvaa ajan kuluessa
  - Jonkin ajan kuluttua virhesuureen integraali on riittävän suuri aiheuttamaan tarvittavan muutoksen
- Tuodaan P-säätimen rinnalle integraattori → PI-säädin

PI-säädin

- Erosuuretta skaalataan kertoimella K_P sekä sen integraalia kertoimella K_I

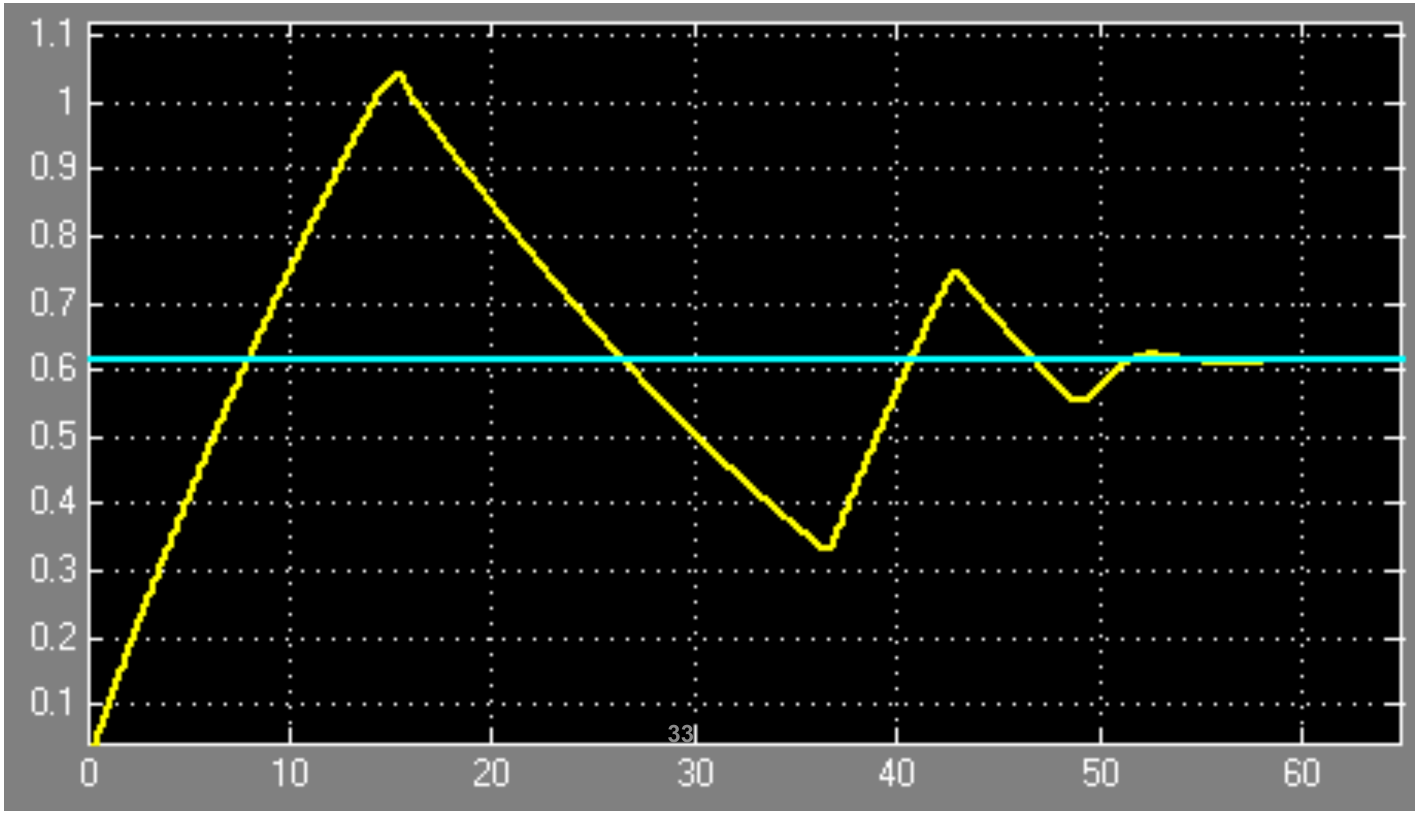


- Syöte prosessille asetusarvon ja mittauksen funktiona:

$$f_I(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(t)\, dt, \qquad e(t) = h_A(t) - h(t)$$

Värähtely, ylitys

- Suuret P- ja I-termit aiheuttavat nopeaa dynamiikkaa
- → Saattaa aiheutua värähtelyä ja/tai referenssiarvon ylitys (samalla lailla kuin kärryesimerkissä)



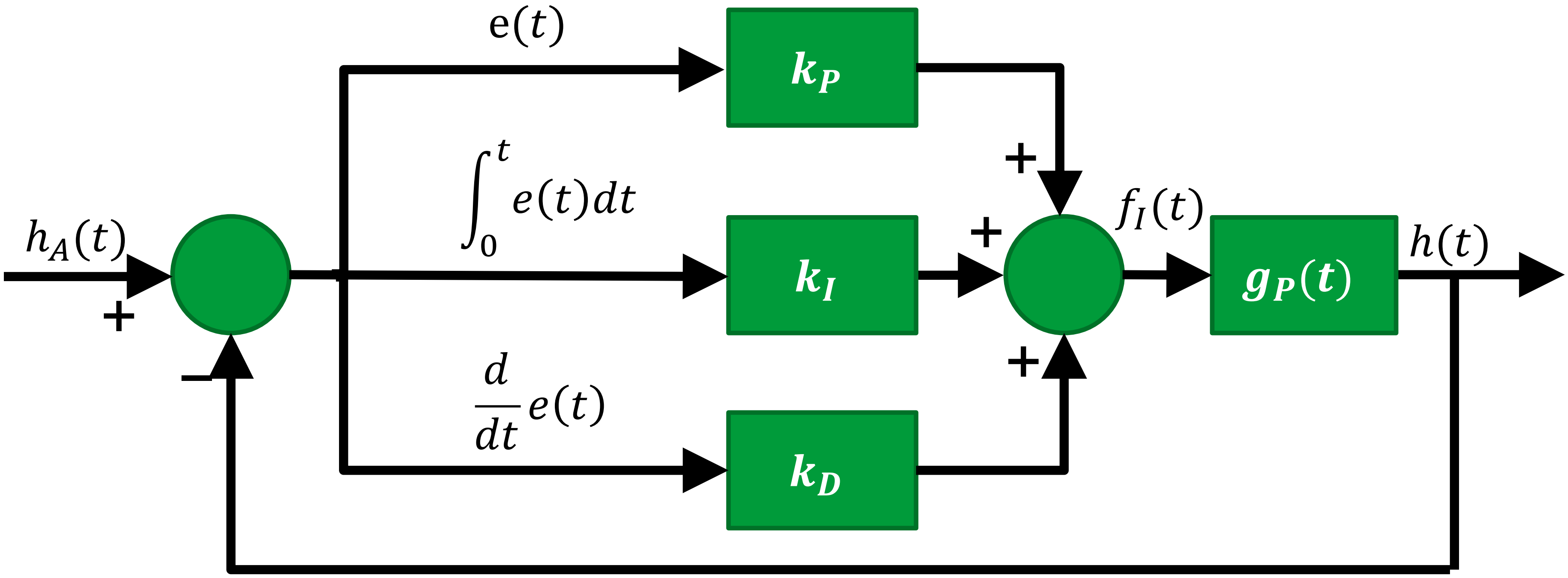
PID-säädin (Proportional + Integral + Derivative)

- Nopeat muutokset aiheuttavat suuren derivaatan
- Muutosta voidaan hidastaa derivaattatermillä
- Suuri erosuureen derivaatta jarruttaa muutosta hetkellisesti

PID-säädin

- Erosuuretta skaalataan kertoimella k_P, sen integraalia kertoimella k_I ja sen derivaattaa kertoimella k_D:

$$k_P e(t) + k_I \int_0^t e(t)dt + k_D \frac{d}{dt} e(t)$$



P/I/D-säätimet yhteenveto

- Yksinkertaisin jatkuvan ajan säädin: P-säädin
  - Virhesuureeseen verrannollinen prosessin ohjaus
- Värähtelyjen vaimentaminen PD-säätimellä
  - Hidastaa muutosta, kun erosuureen ajan derivaatta on suuri
- Pysyvän virheen poikkeaman poistaminen PI-säätimellä
  - Integraattori integroi virhesuuretta, ja ajan myötä integraali kasvaa riittävän suureksi
- PI- ja PD-säätimien yhdistelmä → PID-säädin

PID-säädin

- Hyvin yleisesti käytetty säädin monissa sovelluksissa
  - Teollisuusprosesseissa
  - Moottorien nopeusohjauksessa
  - Robotiikassa
  - Sähköpiirien ohjauksessa
- Vain kolme viritettävää parametria
- Voidaan virittää joskus jopa ilman prosessin mallia

Integroiva prosessi

- Joskus prosessissa itsessään integraattori
- Esim.
  - Säiliö, jossa ei ole jatkuvaa ulosvirtausta. Tulovirtaus integroituu ajan myötä säiliöön.
- Tällöin säätimessä ei tarvita integraattoria
- Voidaan käyttää PD-säädintä (Proportional + Derivative)
  - PID-säätimen integraattorin vahvistus nollaksi

Säätimet

- Muitakin lineaarisia säätimiä (kuin P/PI/PID/PD) on olemassa
  - Esim. vaiheenjohto- ja vaiheenjättökompensaattorit
- Epälineaariset säätimet monimutkaisempia
  - Ei välttämättä enää pystytä mallintamaan perinteisillä menetelmillä
  - Usein kuitenkin lineaarinen säädin riittää
- Myös monen muuttujan säätö yhtä aikaa mahdollista

Ei käsitellä tarkemmin tällä kurssilla

Mitä tänään opittiin

- Säädön periaate
- Dynaamiset ominaisuudet
- On-off-säätö
- P-, PD-, PI-, ja PID-säätimet ja mitä ongelmia ne ratkaisevat
- Järjestelmän stabiilius ja värähtely