Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

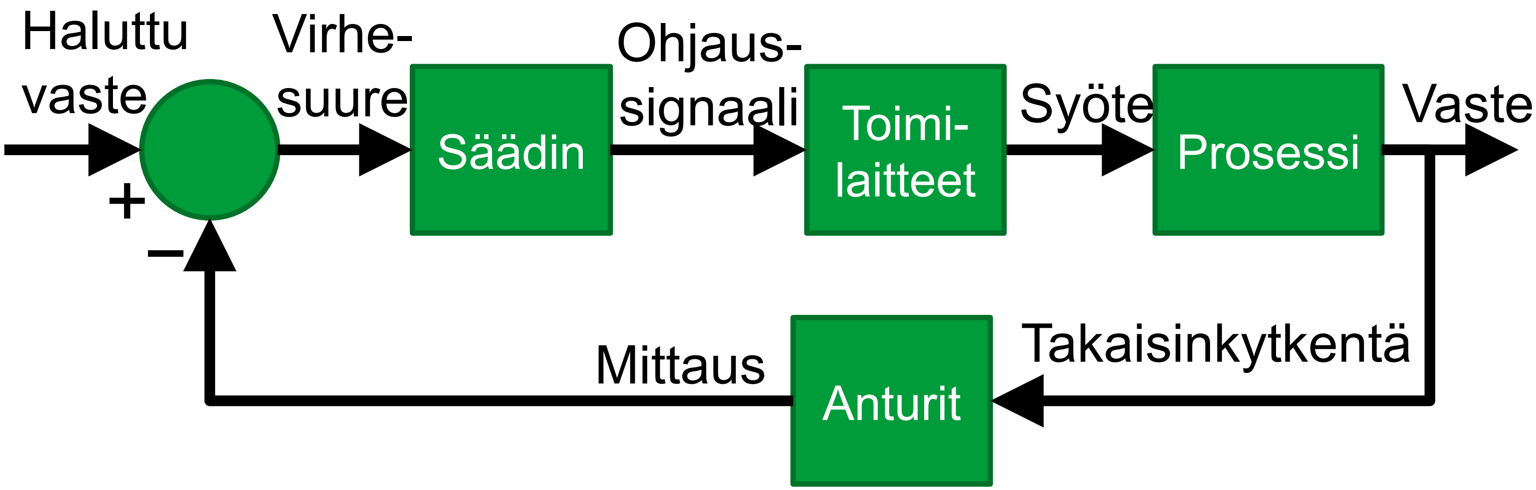
ELEC-C1110 Automaatio- ja systeemitekniikan perusteet

Luento 7

Robotiikka, robotin kinematiikka

Joni Pajarinen 6.3.2023

Referenssiarvon muunnos



Referenssiarvon muunnos

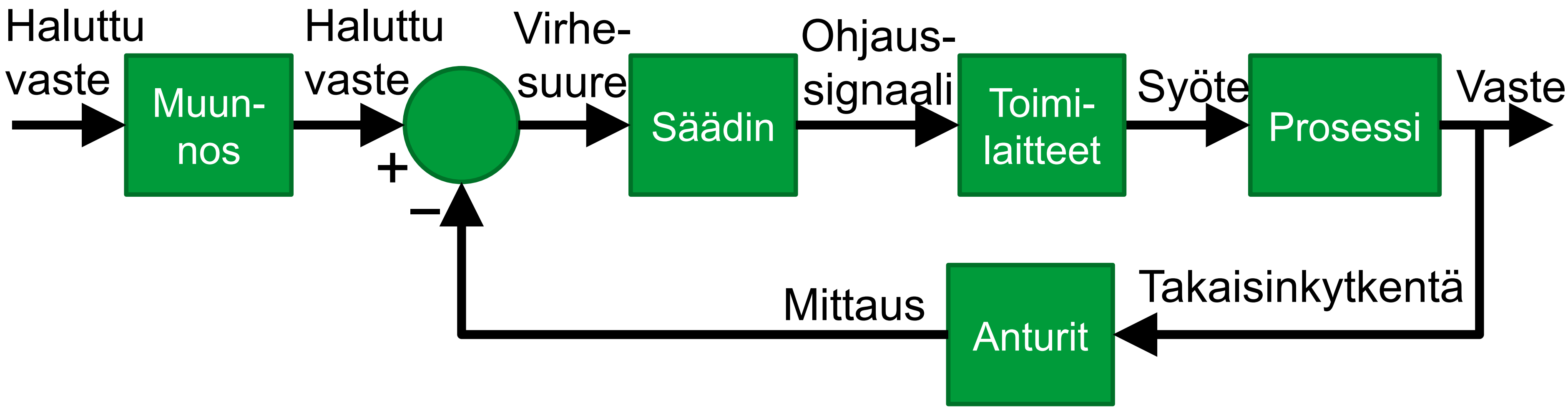
- Usein ei olla kiinnostuneita suoraan säädettävästä suureesta
- Tarvitaan muunnos
  - Esim. geometrinen muunnos, koordinaatistomuunnos

Referenssiarvon muunnos

Esimerkki: Robotin kinematiikka

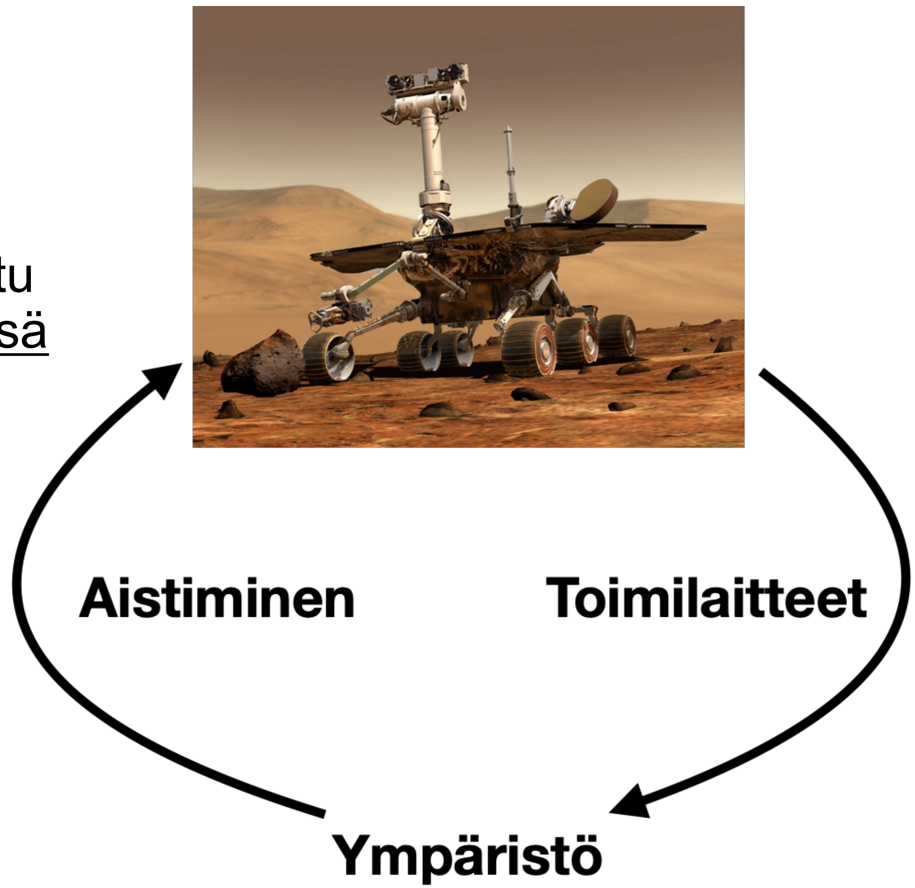
- Käytännön sovelluksissa kiinnostavat suureet: XYZ-koordinaatit
- Säädettävät suureet: nivelten kulmat
- Aina ei löydy yksiselitteistä ratkaisua

Referenssiarvon muunnos

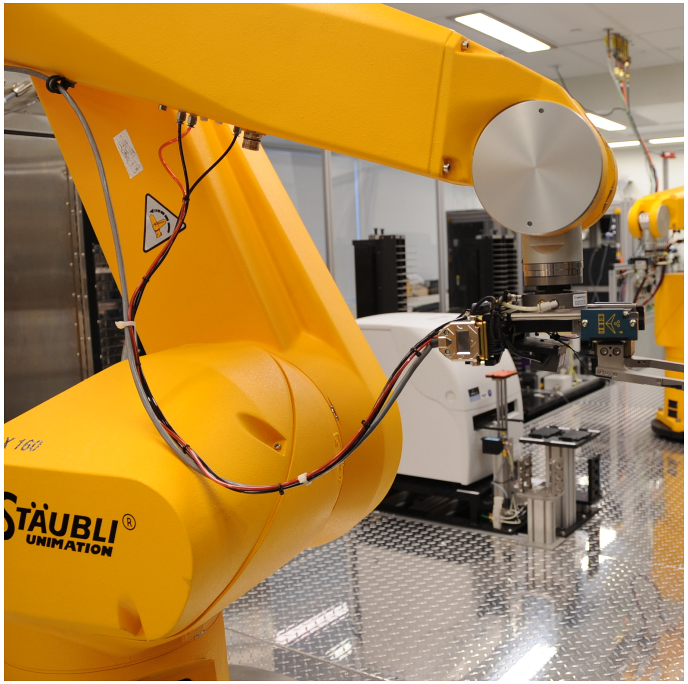


Robotiikka

- Mikä on robotti?
  - R.U.R (Rossum’s Universal Robots, Karel Čapek, 1921)
  - Ohjelmoitava tietokoneella ohjattu laite, <u>joka vaikuttaa ympäristöönsä</u>
- Robotti on vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa kahdella tavalla
  - Toimilaitteet
  - Aistinta (mittaus)
- Robotiikka
  = aistinta + suunnittelu + mallinnus + säätö + ...



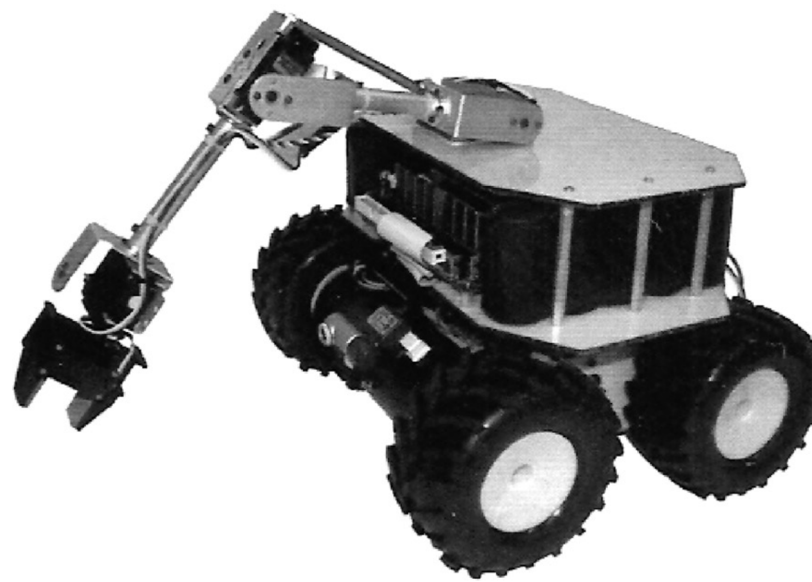
Robottikäsivarret



- Yleisiä teollisuudessa
- Kaupallisesti saatavilla 60-luvulta lähtien
- Sovelluksia
  - kokoonpano
  - koneistus (esim. *jäysteenpoisto, hionta, kiillotus*)
  - piste- ja kaarihitsaus (https://www.youtube.com/watch?v=N5AYZxsnDuM)
  - maalaus
  - ...

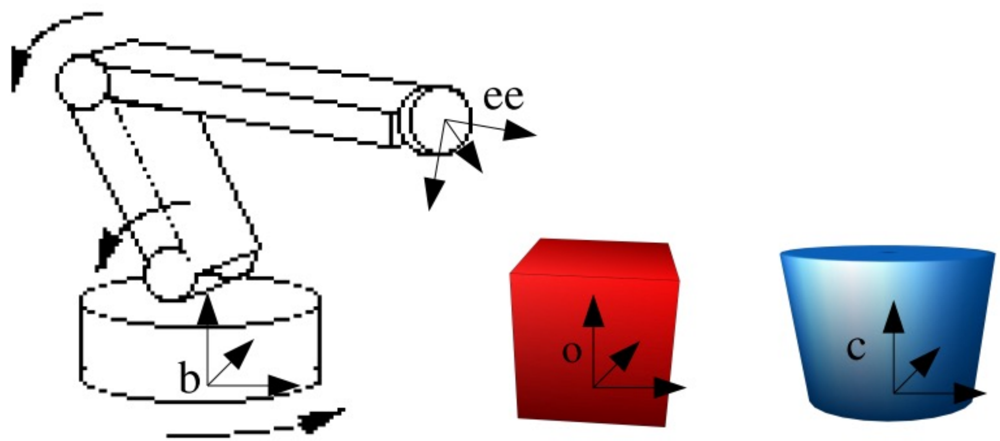
Liikkuvat robotit

- Pelkästään liikkuvat robotit
  - Esim. Google Car, pölynimurirobotit
  - https://www.youtube.com/watch?v=nXlqv_k4P8Q
- Liikkuvat ja manipuloivat robotit
  - Ihmisten apuna toimivat palvelurobotit
  - Usein mukana myös jonkinlainen käsivarsi (tai useampia)
  - https://www.youtube.com/watch?v=Bmglbk_Op64
  - https://www.youtube.com/watch?v=1AhLzMMn-G8



Paikan ja asennon kuvaaminen

- Koordinaattijärjestelmä (koordinaatisto)
  - Kuvaa sekä paikan että asennon
  - engl. coordinate system, CS
- Tarvitaan kuvaus siirtymästä koordinaattijärjestelmästä toiseen



Kinematiikka

- Liikkeiden laskenta ilman vaikuttavien voimien käsittelyä
- Paikka, nopeus, kiihtyvyys, yms.
- Robottikäsivarressa on kiinteiden varsien liitoskohtia, joita kutsutaan niveliksi
  - Pyörivät nivelet: nivelkulmat
  - Liukuvat nivelet: siirros
  - Harvinaisempia: pallonivel, ruuvimainen nivel, tasossa liikkuva ja sylinterinivel

- Suora liike karteesisessa (X,Y,Z) koordinaatistossa muuttuu robotin nivelkulmien (kierto)liikkeiden kombinaatioksi

Kinematiikka

- Kolmiulotteisessa maailmassa 6 <u>vapausastetta</u>, kappaleen paikka (x,y,z-koordinaatit) sekä asento (α,β,γ kulmat)
  - engl. degree of freedom, DoF
- Kinemaattisen mekanismin vapausasteet = itsenäisten liikevapausasteiden määrä
- Yleensä nivelten lukumäärä
- Työkalupiste (robottimanipulaattorin kärki, engl. end-effector)
  - tarttuja
  - hitsaussuutin
  - tms.
- Robotin työalue: alue, jonka puitteissa työkalupistettä voi liikutella

?

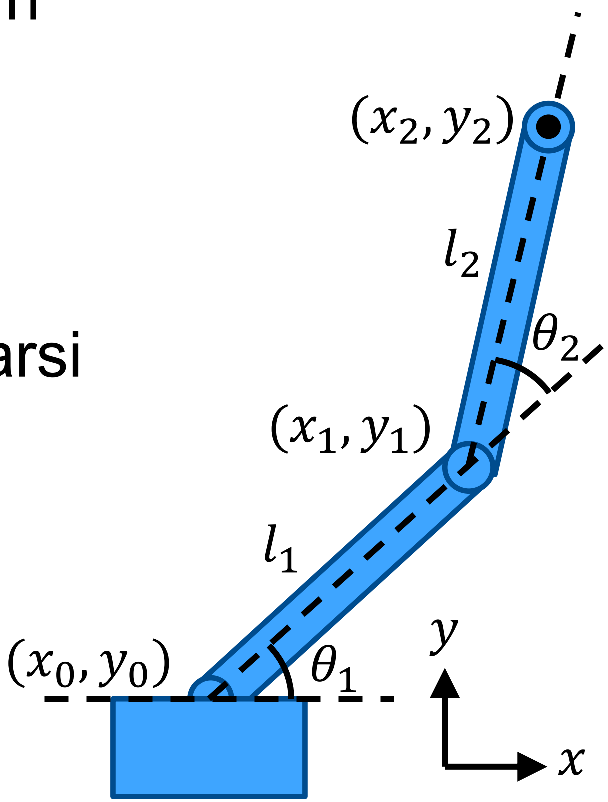
Miten tiedämme, missä robotin työkalupiste on?

https://www.youtube.com/watch?v=SZP1KQ2qSEA

Suora kinematiikka

- Työkalupisteen paikan laskenta, kun nivelten parametrit tiedetään
- Geometriaa!
- Esim. tasossa liikkuva robottikäsivarsi

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + l_1 \cos\theta_1 \\
y_1 &= y_0 + l_1 \sin\theta_1 \\
x_2 &= x_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
y_2 &= y_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
$$



Kinematiikan matriisiesitys

- Puhtaasti trigonometrisiin yhtälöihin perustuva esitys muuttuu nopeasti hankalaksi käsitellä
  - Eikä yleisty helposti kolmeen dimensioon
- Hyödynnetään matriisilaskentaa
- Siirrytään koordinaatistojärjestelmien välillä
  - paikkaa kuvaa vektori
  - siirtymä toteutetaan matriisikertolaskulla

Paikan esitys

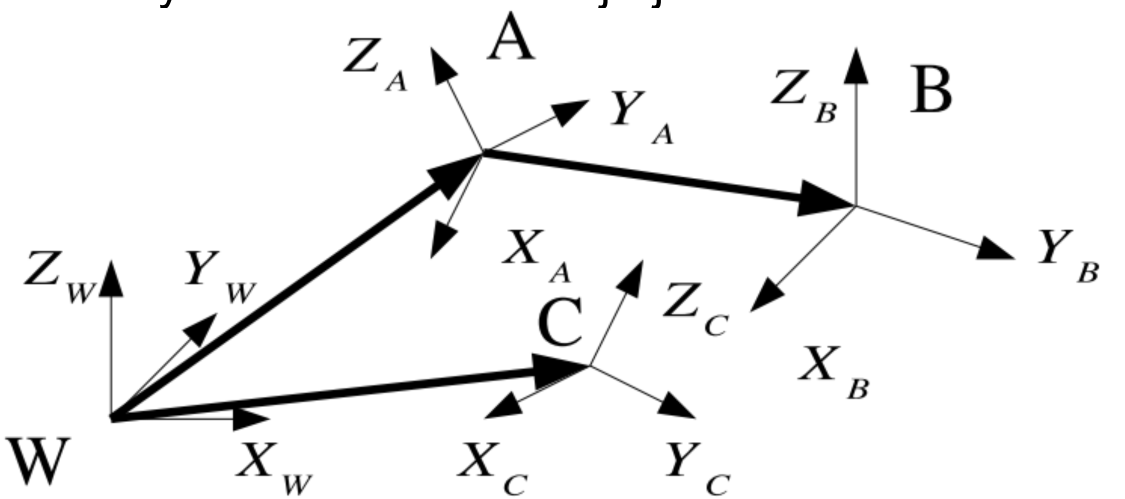
- Paikkavektori määrittää minkä tahansa pisteen koordinaattijärjestelmässä
- Käsitellään 2-ulotteista tapausta
  - Helpompi visualisoida esimerkkejä
  - Yleistyy helposti kolmeen ulottuvuuteen
- Yleisesti 2-ulotteisessa avaruudessa:
  - Piste P koordinaattijärjestelmässä W: ${}^{W}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$
  - Koordinaattijärjestelmä W tarvitaan

Asennon/suunnan esitys

- Kiinnitetään koordinaattijärjestelmä B kappaleeseen ja esitetään sen asento globaalissa koordinaattijärjestelmässä
- Kuvataan B kirjoittamalla sen yksikköpääakselit koordinaattijärjestelmässä W
  - Jos ${}^{W}\boldsymbol{X}_B$, ${}^{W}\boldsymbol{Y}_B$ ovat akselit, ne voidaan liittää yhteen kiertomatriisiksi (rotaatiomatriisi) ${}^{W}\boldsymbol{R}_B$
  - Rotaatiomatriisi kuvaa asentoa= $\left[{}^{W}\boldsymbol{X}_B, {}^{W}\boldsymbol{Y}_B\right]$

Koordinaattijärjestelmän kuvaus

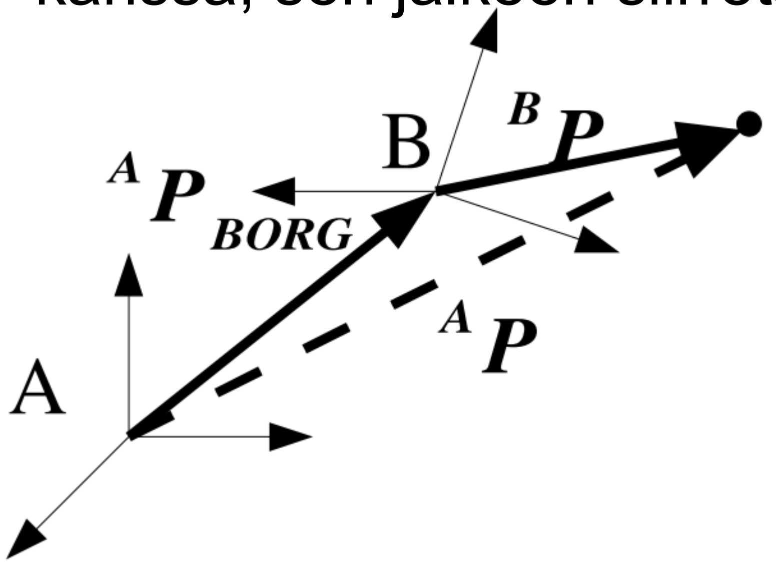
- Paikka + asento
- Kuvataan koordinaatiston origo kiinnitettynä kappaleeseen sekä koordinaatiston asento
  - koordinaatisto = piste + rotaatiomatriisi
  - $\{B\} = \{\,{}^{A}\boldsymbol{R}_B\,,\ \ {}^{A}\boldsymbol{P}_{BORG}\}$
    - Kuvaa yhden koordinaatistojärjestelmän suhteessa toiseen



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Kuvaus koordinaattijärjestelmästä toiseen

- Jos tunnetaan pisteen P paikka koordinaatistossa B, miten määritetään sen paikka koordinaatistossa A?
- Ensin kierretään koordinaatisto samansuuntaiseksi A:n kanssa, sen jälkeen siirretään se oikeaan kohtaan



$$^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{P} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BORG}$$

Kiertomatriiseista

- Koordinaatiston suunnan määrittää kiertomatriisi
- 2-ulotteinen kiertomatriisi, ilmaisee *B*-koordinaatiston akselien suunnat *W*-koordinaatiston suhteen

$$ {}^{W}\boldsymbol{R}_B(\theta) = [{}^{W}\boldsymbol{X}_B,\, {}^{W}\boldsymbol{Y}_B] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

- 3 ulottuvuudessa on kolme suorakulmaisen koordinaatiston pääakselia (x-,y- ja z-akselit)
  - Kolmiulotteinen kiertomatriisi on tällöin muotoa (edellisen esimerkin tapauksessa, eli rotaatio tason normaalivektorin eli z-akselin ympäri):

$$ {}^{W}\boldsymbol{R}_B(\theta) = [{}^{W}\boldsymbol{X}_B,\, {}^{W}\boldsymbol{Y}_B, {}^{W}\boldsymbol{Z}_B,] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Esimerkki: Missä työkalupiste on?

- Tkp (koordinaatiston 3 origo) koordinaatistossa 2

$$^{2}\boldsymbol{P}_{3ORG} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Missä tkp on koordinaatistossa 1?

$$^{1}\boldsymbol{P}_{3ORG} = {}^{1}\boldsymbol{R}_2 \, {}^{2}\boldsymbol{P}_{3ORG} + {}^{1}\boldsymbol{P}_{2ORG}$$

$$^{1}\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

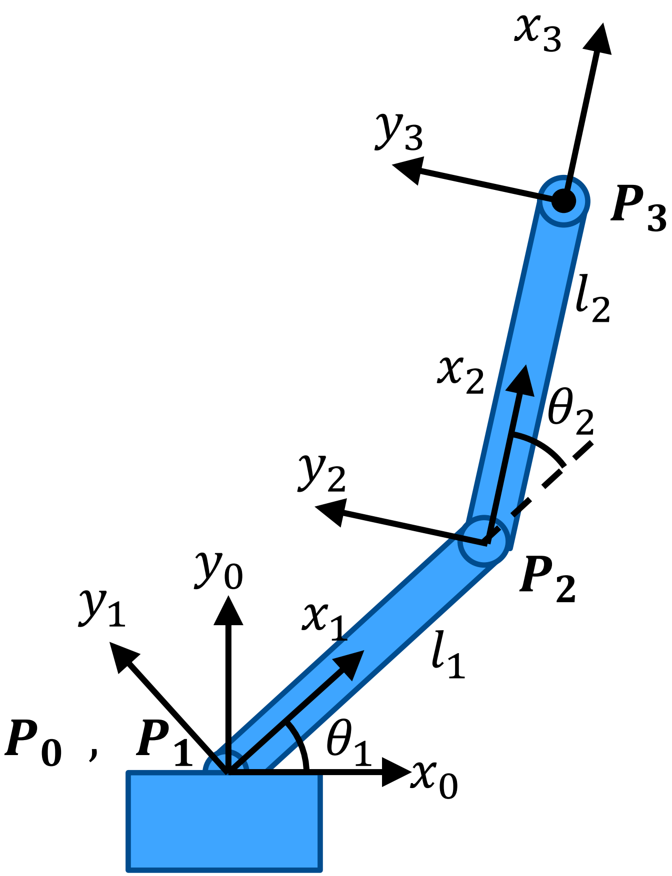
$$^{1}\boldsymbol{P}_{2ORG} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Entä koordinaatistossa 0?

$$^{0}\boldsymbol{P}_{3ORG} = {}^{0}\boldsymbol{R}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{P}_{3ORG} + {}^{0}\boldsymbol{P}_{1ORG}$$

$$^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$^{0}\boldsymbol{P}_{1ORG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

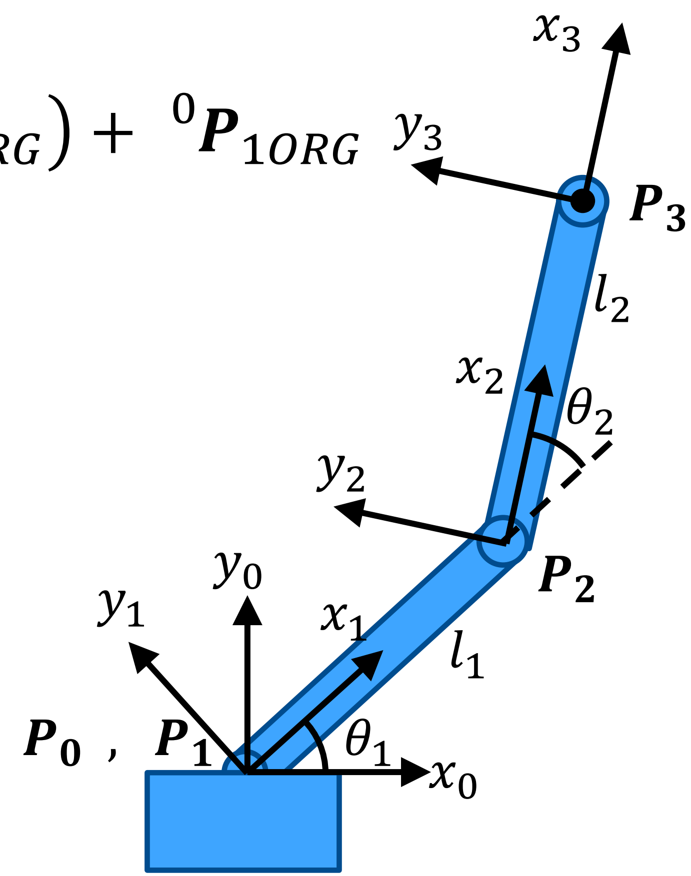


Esimerkkirobotti

- Koordinaatistomuunnosten yhdistäminen

$$ {}^{0}\boldsymbol{P}_{3ORG} = {}^{0}\boldsymbol{R}_{1}\left({}^{1}\boldsymbol{R}_{2}\, {}^{2}\boldsymbol{P}_{3ORG} + {}^{1}\boldsymbol{P}_{2ORG}\right) + {}^{0}\boldsymbol{P}_{1ORG} $$

Menee sekavaksi, kun vapausasteiden määrä kasvaa



Homogeeninen muunnos

- 2x1 paikkavektorin sijaan käytetäänkin 3x1 *homogeenista* paikkavektoria

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Koordinaatistojen välinen kuvaus voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & {}^{A}\boldsymbol{P}_{BORG} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{P} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad {}^{A}\boldsymbol{P} = {}^{A}\boldsymbol{T}_B \, {}^{B}\boldsymbol{P}$$

- 3x3 matriisia $\boldsymbol{T}$ kutsutaan *Homogeeniseksi muunnokseksi*
- $\boldsymbol{T}$ sekä 1) kuvaa koordinaatiston että 2) on koordinaatistojen välinen kuvaus

Muunnoksista

- Transformaatio-operaattori vastaa kiinteän kappaleen liikettä
- Yhdistetty muunnos voidaan helposti esittää standardina matriisikertolaskuna

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{C} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\, {}^{B}\boldsymbol{T}_{C} $$

- Käänteismuunnos voidaan tehdä käänteismatriisilla
  - Siirrytään takaperin kinemaattisessa ketjussa

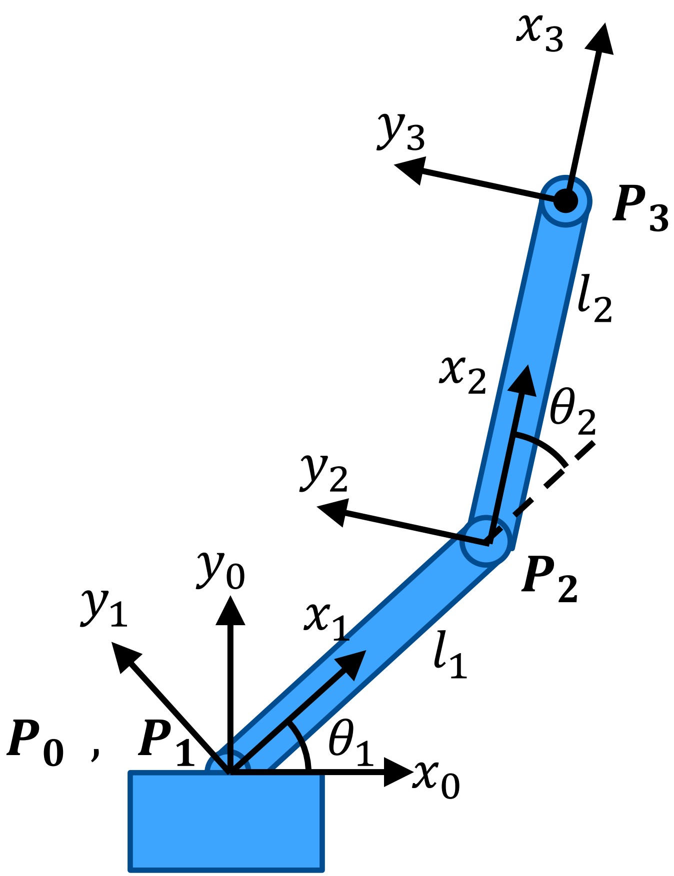
Esimerkkirobotti

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

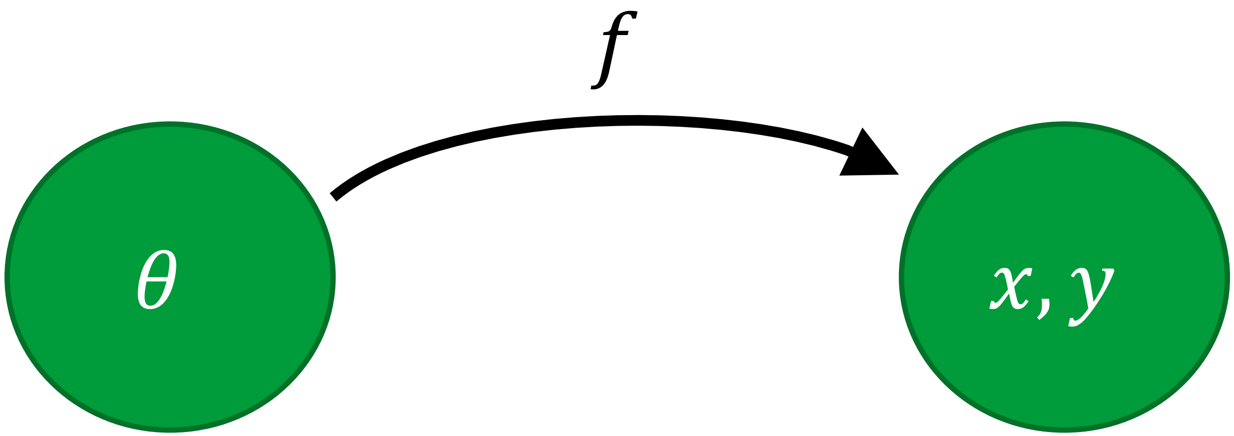
$$ {}^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_3 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{T}_2 \, {}^{2}\boldsymbol{T}_3 $$



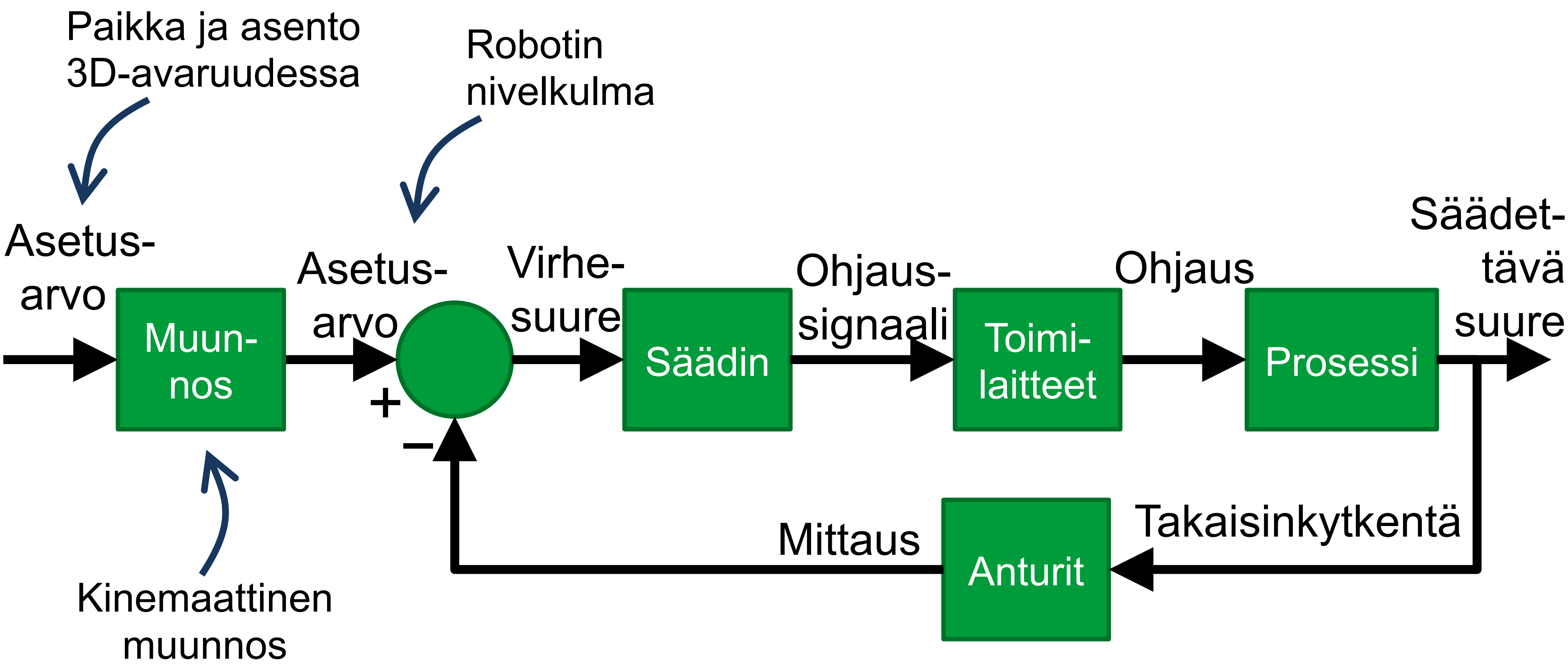
Parametriavaruuksien välinen muunnos: suora kinematiikka



?

Miten robotti saadaan paikkaan X,Y?

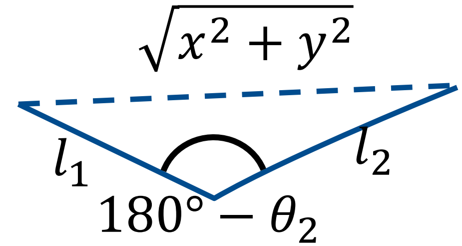
Robotin kinemaattisen muunnoksen huomioiminen



Käänteinen kinematiikka
Inverse kinematics, IK

- Jos tunnetaan työkalupisteen paikka, mitkä ovat robotin nivelten kulmat?
- Hankalampaa kuin suoran kinematiikan laskenta
  - Ratkaisua ei välttämättä löydy suljetussa muodossa
- Ratkaisuja voi olla enemmän kuin 1
- Tyypillisesti ratkaistaan geometrinen ongelma
  - Kolmiolaskentaa

Käänteinen kinematiikka: esimerkki



Kosinilause:

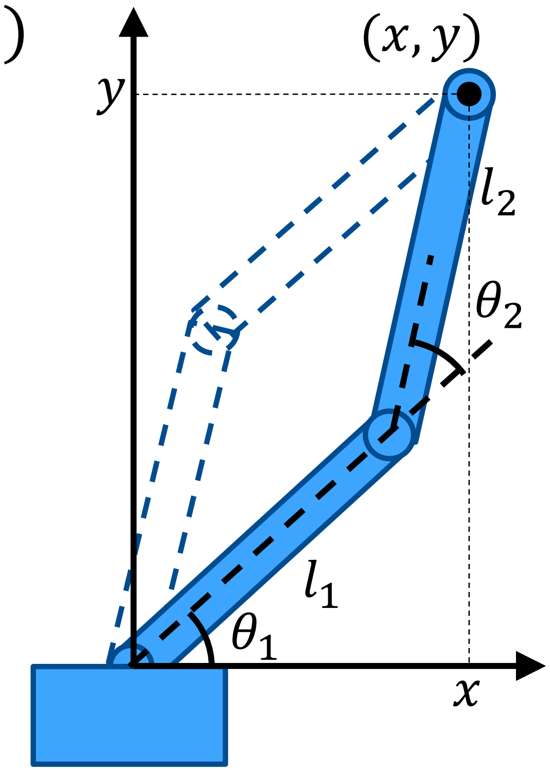
$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(180° - \theta_2)$$

$$\cos(180° - \theta_2) = -\cos(\theta_2)$$

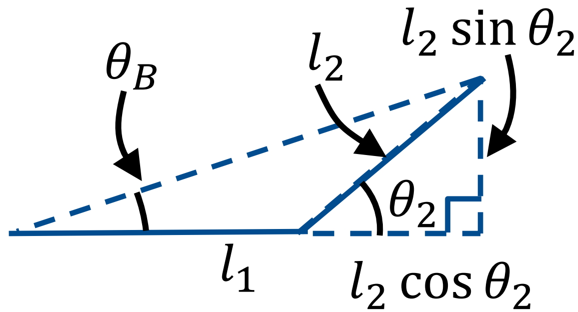
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)$$

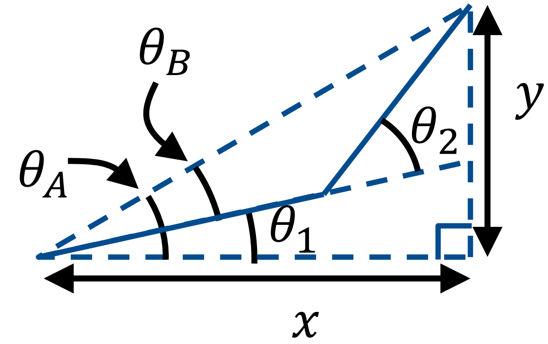
$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad := D$$

$$\theta_2 = \pm\cos^{-1}(D)$$



Käänteinen kinematiikka: esimerkki

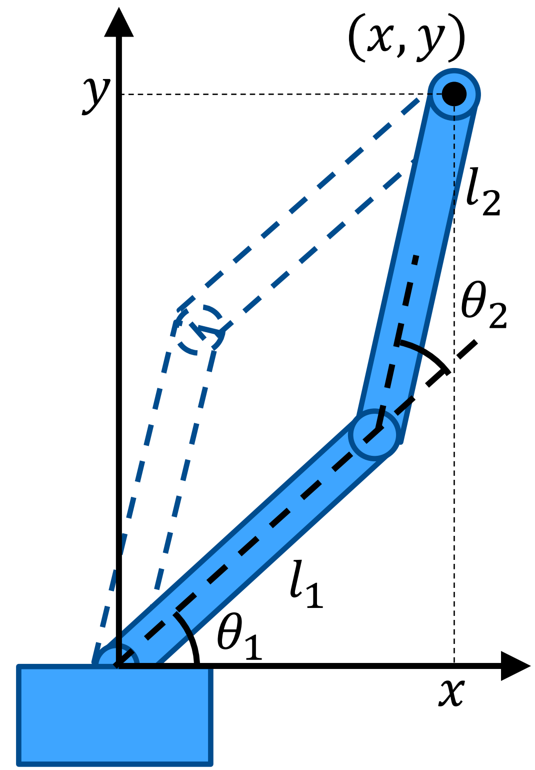




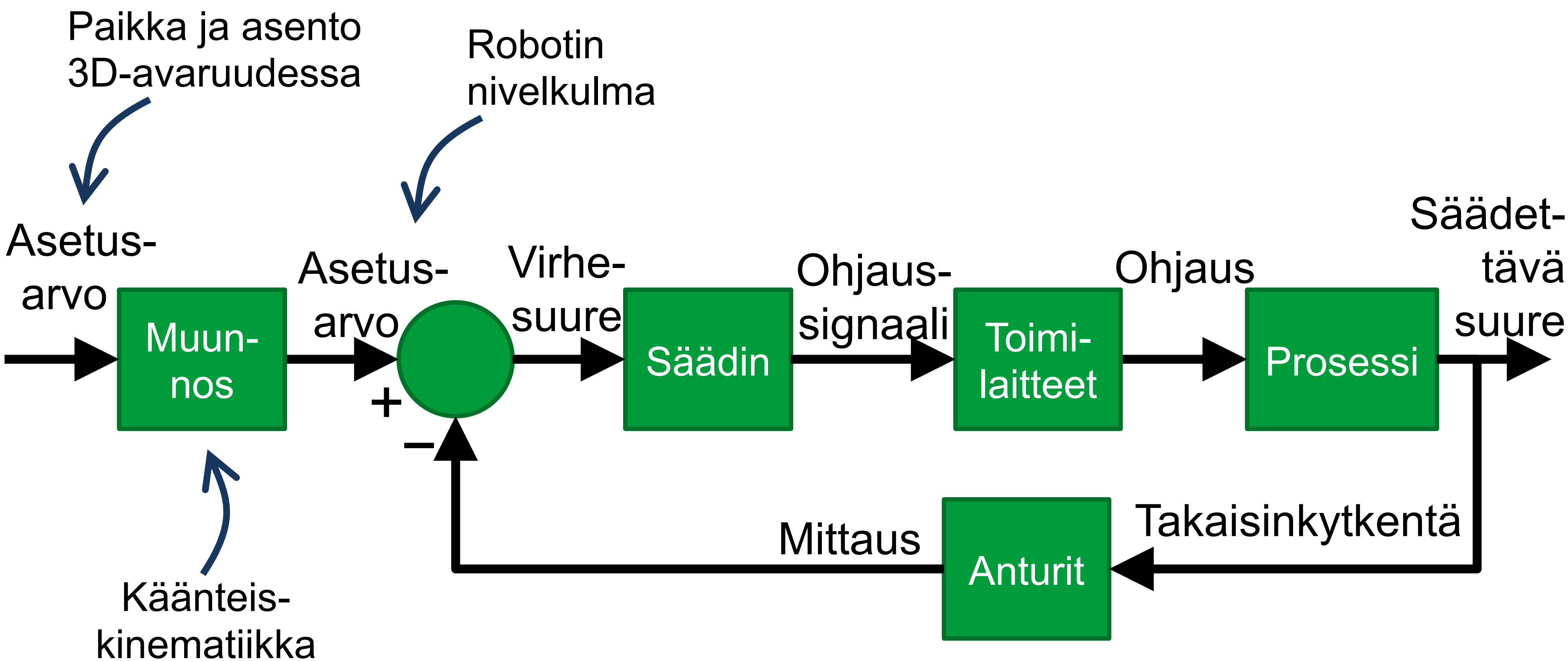
$$\theta_A = atan2(y, x)$$

$$\theta_B = atan2(l_2 \sin\theta_2, l_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

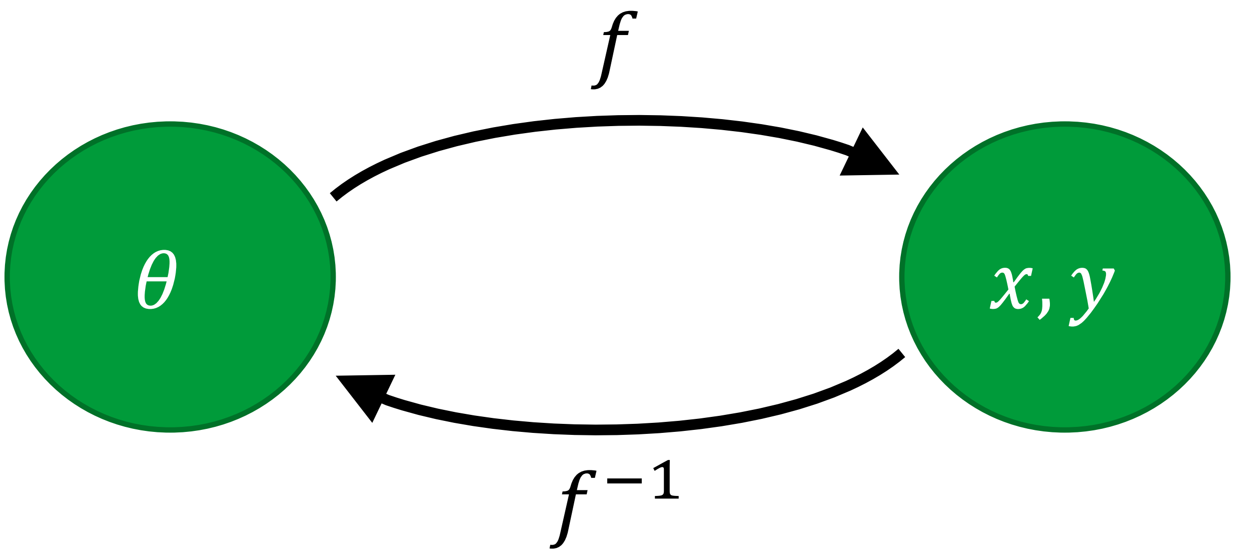
$$\theta_1 = \theta_A - \theta_B$$



Robotin kinemaattisen muunnoksen huomioiminen



Parametriavaruuksien välinen muunnos: suora ja käänteinen kinematiikka



Liikekinematiikka

- Usein kiinnostavat robotin nivelkulmien <u>muutokset</u>
- Jacobin matriisin avulla saadaan laskettua muutos karteesisessa koordinaatistossa, kun tiedetään muutos nivelkulmissa

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

- Jacobin matriisi on suoran kinematiikan derivaattamatriisi

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

Käänteinen Jacobin matriisi

- Kuinka laskea haluttu nivelnopeus, kun tiedetään, kuinka nopeasti halutaan liikkua (X,Y):ssä?

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

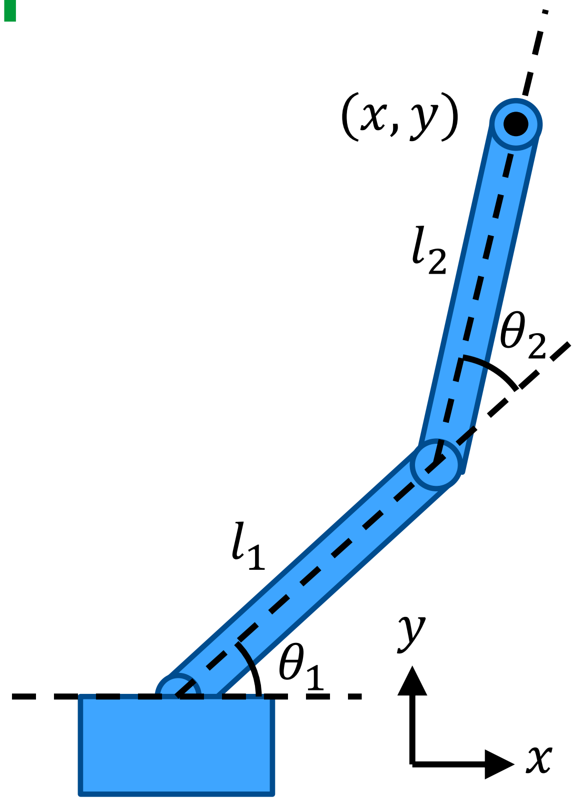
$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{P}}$$

- Käänteismatriisia ei aina ole olemassa
- Tällöin tiettyä karteesista nopeutta ei voi toteuttaa
  → Singulariteetti

Esimerkki Jacobin matriisin laskemisesta

Mikä on Jacobin matriisi tälle robotille?

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Yhteenveto

- Termistö
  - Nivelavaruus (joint space)
  - Työavaruus (work space)
  - Suora kinematiikka (forward kinematics)
  - Käänteinen kinematiikka (inverse kinematics)
  - Liikekinematiikka (velocity kinematics)
- Sarjarakenteisen robotin suoran kinematiikan ratkaisu ketjutetuilla koordinaatistomuunnoksilla