

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)

Kurssitentti ja yleinen tentti 8.12.2020 klo 9.00-12.00

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: “viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai “pelkät kuusi koetehtävää”.

1. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 7}.$$

- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$$

- c) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{e^x}.$$

2. a) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}?$$

- b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3 + \sqrt{k}}?$$

- c) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k} x^k$$

suppenee?

3. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^1 \sin \sqrt{x} dx.$$

a) Määritä likiarvo korvaamalla sinifunktio $\sin(t)$ sen kolmannen asteen Maclaurin-polynomilla ja sijoittamalla siihen uusi muuttuja. Huom: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.

b) Laske integraalin tarkka arvo sopivan sijoituksen avulla.

4. Tarkastellaan funktiota $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

a) Määrää funktion f suurin arvo.

b) Määrää funktion f käännepisteet.

c) Laske

$$\int_0^{\infty} f(x) dx.$$

5. Määrittää differentiaaliyhtälön

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -2$.

6. Ratkaise lineaarinen yhtälö $xy' - 3y = x^5$, missä $x > 0$.

a) Kirjoita yhtälö ensin normaalimuotoon $y' + p(x)y = q(x)$.

b) Muodosta integroiva tekijä $x \mapsto e^{u(x)}$, missä $u(x) = \int p(x) dx$.

c) Kerro normaalimuotoinen yhtälö puolittain integroivalla tekijällä.

d) Integroi yhtälö puolittain muuttujan x suhteen.

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

$$\text{Sarja } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ suppenee, jos ja vain jos } p > 1.$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentint voi uusua III-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**