KURSSI

VIIKKO

1 LUKUJONO

2 SARJAT
POTENSSISARJAT

3 JATKUVUUS
DERIVAATTA
ALKEISFUNKTIOITA

4

## KOOSTE TÄHÄNASTISESTA

- SUPPILOPERIAATE TYÖKALUNA

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to L, \quad c_n \to L$$

$\Rightarrow$ MYÖS $b_n \to L$, KUN $n \to \infty$

SEURAAVAKSI

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad f(x) \to L, \quad h(x) \to L$$

$\Rightarrow g(x) \to L$

## SARJAT

JOITAKIN SUMMIA OSATAAN LASKEA

5-2

- GEOM. $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q}$, $|q|<1$

- TELESKOOPPINEN $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = (a_0 - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_1} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \dots$

$= a_0$

LISÄÄ SUMMIA, JOTKA VOIDAAN LASKEA

- LASKUSÄÄNNÖT

ESIM. $\sum_{n=0}^{\infty} (a q^n + b p^n) = \frac{a}{1-q} + \frac{b}{1-p}$,

EHTO q:LLE JA p:LLE ?

AINAKIN $\begin{cases} |q|<1 \\ |p|<1 \end{cases}$ ok

- POTENSSISARJAT

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

- $\begin{cases} \text{TARKISTETAAN, ETTÄ SUPPENEE} \\ \text{LIKIARVO TIETOKONEELLA} \end{cases}$

ESIM. TIETOKONE VOI TEHDÄ VIRHEITÄ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

TIETOKONEEN MUKAAN $=0$ KUN n TARPEEKSI SUURI

# SUPPENEMISEN PERUSTULOKSIA



- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ SUPPENEE $\Leftrightarrow$ $p > 1$

ESIM. (*) $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ HAJ.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ SUPP.} \end{cases}$

ESIM. SUPPENEEKO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{n^3+7n}$

RATK. MUOKKAA/ARVIOI JA VERTAA SARJOIHIN (*)

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SUPP. $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ SUPP.

$a_n = f(n)$

$\begin{cases} f \text{ JATKUVA} \\ f(x) \geq 0 \\ f \text{ LASKEVA} \end{cases}$

$$\frac{a_n}{b_n} \to C, \quad 0 < C < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ SUPP.} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ SUPP.}$$

(TODISTUS GEOM. SARJAN AVULLA)

---

$$0 \leq b_n \leq a_n$$

MAJORANTTI P.A.

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SUPP. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ SUPP.

② $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ HAJ. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ HAJ.

MINORANTTI-PERIAATE

TAPAUS $0 \leq |b_n| \leq a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ SUPP.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \text{ SUPP.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ SUPP.}$$

TODISTUS GEOM. SARJA $\Rightarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2

RISTIRIITATODISTUS

5-5

## SUHDETESTI / POTENSSISARJAN SUPPENEMISSÄDE

- $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ SUPP. $\Leftrightarrow |q|<1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$

$$\begin{cases} L<1 & \text{SUPP.} \\ L=1 & ? \\ L>1 & \text{HAJ.} \end{cases}$$

HMM.

- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \to R$

SUPP. $x_0 - R < x < x_0 + R$

PÄÄTEPISTEET $x = x_0 - R$, $x = x_0 + R$?

HAJ. $x < x_0 - R$

TAI $x > x_0 + R$

PARAS TODISTUSTYÖKALU OLI GEOMETRINEN SARJA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

5-6

$$\begin{cases} a_n > 0 \\ a_{n+1} < a_n \\ a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SUPPENEE, ARVIO}$$

$$|S - S_n| < |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

---

TULEVAA ASIAA

- $f$ JATKUVA PISTEESSÄ $a$, TARKASTELU JONOJEN AVULLA
- $f$:N RAJA-ARVO
- DERIVAATTA
  - → VÄLIARVOLAUSE
    - → L'HOSPITAL (LAUSU ESIM. LOPITAALI)
    - → TAYLORIN KAAVA/SARJA

ESIM.

$\lim_{x \to}$

5–7

ESIM.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

SAMA TULOS

TAI ~~lim~~

TAYLOR

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^{4}}{5!} - \dots\right)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^{4}}{5!} - \dots}_{\to 1} = 1$$

# JATKUVUUS

**MÄÄRITELMÄ:** OLKOON $A \subset \mathbb{R}$ JA $f : A \to \mathbb{R}$ FUNKTIO.

FUNKTIO $f$ ON **JATKUVA** PISTEESSÄ $a \in A$, JOS PÄTEE:

AINA KUN $a_n \in A$ JA $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, NIIN

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a).$$

**LYHYESTI:**

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = f(a)$$

KAIKILLE JONOILLE $(a_n)$, JOILLE $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

JOS $f$ ON JATKUVA JOKAISESSA PISTEESSÄ $a \in A$, NIIN SE ON **JATKUVA** (JOUKOSSA $A$).

RAJA-ARVOJEN LASKUSÄÄNNÖT $\Rightarrow$

JATKUVIA FUNKTIOITA OVAT ESIM.

- POLYNOMIT
- RATIONAALIFUNKTIOT
- JUURIFUNKTIOT
- TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

ESIM. $f(x) = x^2$ ON JATKUVA

TOD. OLKOON $a_n$ JONO, JOLLE $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

NYT $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \underset{\downarrow\, a}{a_n} \cdot \underset{\downarrow\, a}{a_n} = a \cdot a = a^2 = f(a)$.

OK

ESIM. $f(x) = 3x^2 - 2x$ ON JATKUVA

TOD. $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 3a_n^2 - 2a_n = 3a^2 - 2a = f(a)$

OK

ESIM. POLYNOMI $p$ ON JATKUVA PISTEESSÄ $a \in \mathbb{R}$, 

KOSKA $p(x) - p(a) = 0$, KUN $x = a$, NIIN

$$p(x) - p(a) = (x-a)\, q(x)$$

JOKU TOINEN POLYNOMI

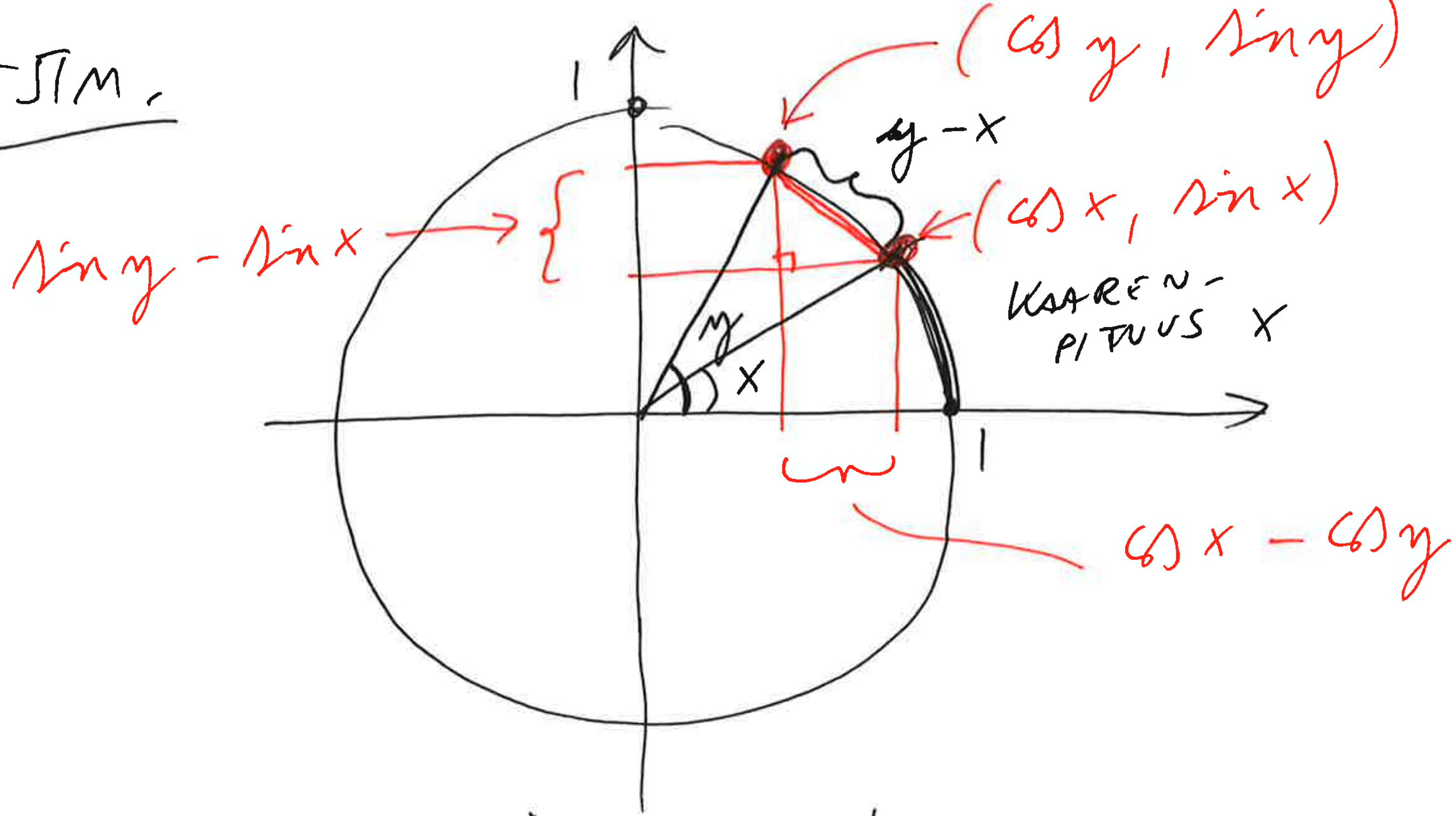
SIIS $0 \leq \left| p(a_n) - p(a) \right| = \underbrace{|q(a_n)|}_{\leq M < \infty} \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} \to 0$, KUN $n \to \infty$

SUPPILOPERIAATE

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} p(a_n) = p(a).$$

ESIM.






$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$$

KOSKA PYSTYSUORA/VAAKASUORA ≤ HYPOTENUUSA

≤ KAAREN PITUUS.

NÄISTÄ EPÄYHTÄLÖISTÄ SEURAA SIN/COS-FUNKTIOIDEN JATKUVUUS:

$$0 \le |\cos a_n - \cos a| \le |a_n - a| \to 0$$

$$0 \le |\sin a_n - \sin a| \le |a_n - a| \to 0, \quad \text{kun } a_n \to a$$

SUPPILOPERIAATE $\Rightarrow$ SIN/COS JATKUVIA.

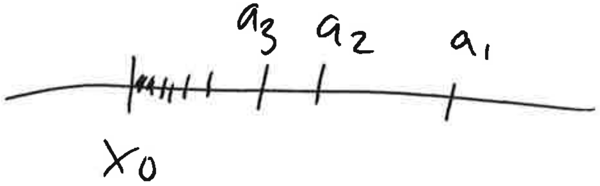
## RAJA-ARVO

OLKOON $f : A \to \mathbb{R}$ JA $x_0 \in \mathbb{R}$ SELLAINEN, ETTÄ

( • $x_0 \in A$ TAI $x_0 \notin A$)

• ON OLEMASSA JONO $(a_n)$, JOLLE $a_n \in A \setminus \{x_0\}$, "A POIS $x_0$" KAIKILLA $n \in \mathbb{N}$,

(ESIM. $A = ]x_0, \infty[$ )




JA LISÄKSI

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

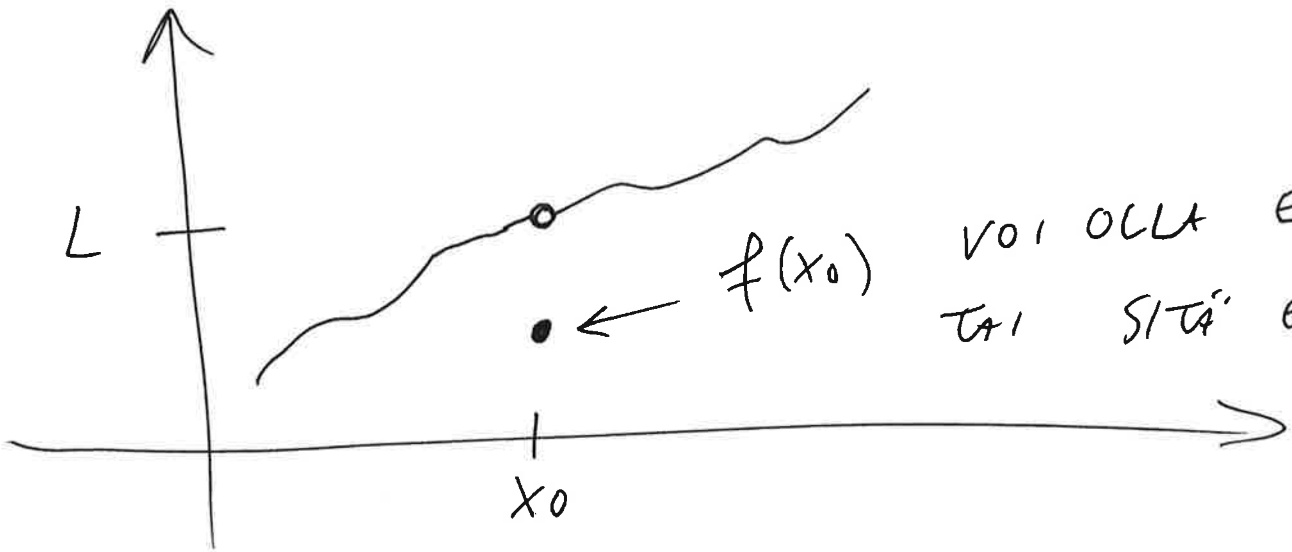
**MÄÄRITELMÄ** EDELLÄ KUVATUSSA TILANTEESSA FUNKTIOLLA $f$ ON RAJA-ARVO $L \in \mathbb{R}$ PISTEESSÄ $x_0$, JOS PÄTEE:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

AINA KUN $a_n \in A \setminus \{x_0\}$ JA

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 .$$

MERKITÄÄN TÄLLÖIN $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.




VOI OLLA ESIM. TÄSSÄ TAI SITÄ EI OLE MÄÄRITELTY LAINKAAN.

KERTAA MYÖS TOISPUOLEISET RAJA-ARVOT

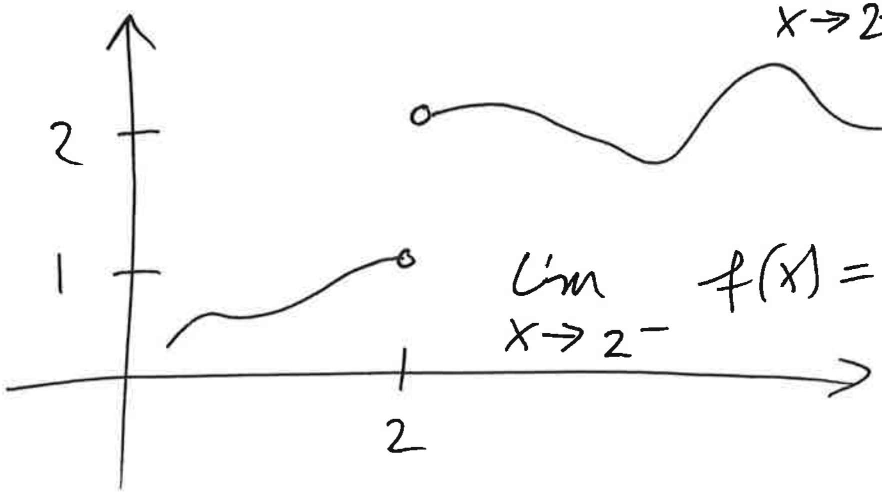
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{JA} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$\underbrace{x \to x_0^+}$

LÄHESTYTÄÄN OIKEALTA

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$$

ERI LUVUT!




$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

VARSINAINEN RAJA-ARVO

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

EI OLEMASSA

RAJA-ARVON TÄRKEIN SOVELLUS ON DERIVAATTA.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ESIM. $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = x + x_0 \rightarrow x_0 + x_0 = 2x_0,$$

KUN $x \to x_0$

SIIS $f'(x_0) = 2x_0$,

5 - 15

TORSTAINA PERUSTELLAAN TARKASTI, ETTÄ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

JA JOHDETAAN KAAVAT

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

TÄMÄN TULOKSEN AVULLA.