8-1

TUNNETUISTA TAYLORIN SARJOISTA/POTENSSISARJOISTA SAA UUSIA MM.

- SIJOITTAMALLA

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad \| \; x \to -x$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots \quad \| \; x = \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{(t^2/2)^2}{2} - \frac{(t^2/2)^3}{6}$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{48} + \dots$$

NORMAALIJAKAUMA

TIHEYSFUNKTIO SUURINPIIRTEIN

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}}$$

$\mu = 0$

$\sigma = 1$

- SUMMA/EROTUS, VIIMEKSI

$$\underline{\sinh(x)} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dots = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

• KERTOLASKULLA

$$f(x) = x^2 \sin(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120_{\nwarrow 5!}} - \ldots\right)$$

8-2

$$= x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$$

TAYLOR

KOKEILLAAN DERIVOIDA SUORAAN

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$f''(x) = \underbrace{2 \sin x + 2x \cos x - x^2 \sin x}_{\text{3 TERMIÄ}}$$

MENEE VAIKEAKSI ! LOPETETAAN

$$\frac{x^2 \cdot x^5}{5!} = \frac{f^{(7)}(0) \cdot x^7}{7!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5!} = \frac{f^{(7)}(0)}{7!} \quad \| \cdot 7!$$

$$\Rightarrow \frac{7!}{5!} = f^{(7)}(0)$$

$$\Rightarrow \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = f^{(7)}(0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f^{(7)}(0) = 42}}$$

TOIMII, KOSKA TAYLORIN SARJA ON YKSIKÄSITTEINEN

KUN KEHITYSKESKUS a ON SAMA "$(x-a)^n$"

8-3

ESIM. $\sin(x)\cos(x)$ TAYLORIN SARJAN PARI ENSIMMÄISTÄ TERMIÄ?

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^5}{120}} \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{24}} \dots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12}$$

$$= x + x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \cancel{x^5(\dots)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

LISÄÄ SARJOJA TUNNETUISTA

- JAKOLASKULLA (OH!!)
- DERIVOIMALLA
- INTEGROIMALLA

$\left.\begin{matrix}\text{DERIVOIMALLA}\\ \text{INTEGROIMALLA}\end{matrix}\right\}$ TEHTIIN AIEMMIN

SOVELLUS TAYLORIN SARJOISTA & DERIVAATASTA

NORMAALIJAKAUMA

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

TIHEYSFUNKTIO

μ ODOTUSARVO

σ KESKIHAJONTA

ESIM. IHMISEN PITUUS

$\mu = 177$ cm

$\sigma = 7$ cm

NORMEERAUS

$\mu = 0$

$\sigma = 1$

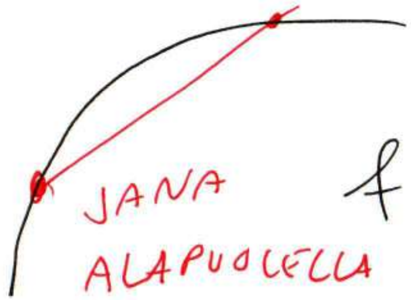
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = 0 \iff x = 0 \qquad e^y \neq 0 \ \forall y$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(x^2 - 1\right) = 0 \iff x = \pm 1$$

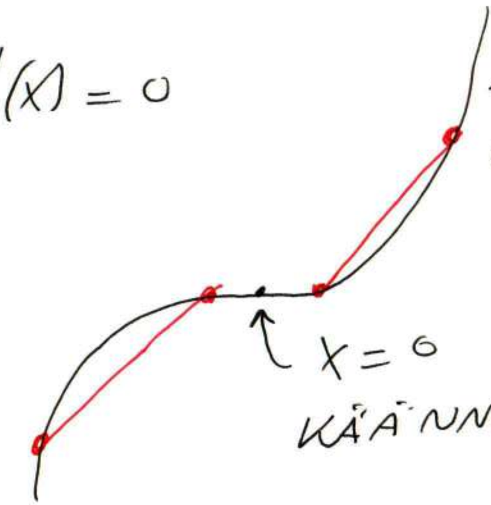
FUNKTION KAAREVUUS

f KONVEKSI



f KONKAAVI

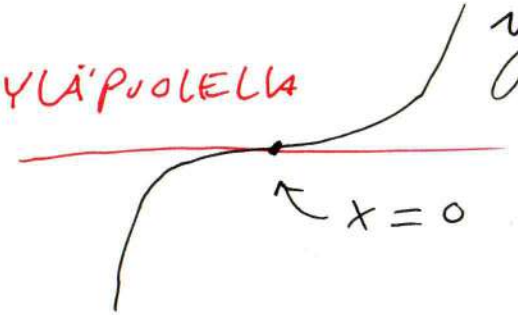
KAAREVUUS MUUTTUU KÄÄNNEPISTEISSÄ, JOISSA $f''(x) = 0$



ESIM. $f(x) = x^3$

$f''(x) = 6x = 0 \iff x = 0$

TANGENTTI MENEE KÄÄNNEPISTEESSÄ ERI PUOLILLE KUVAAJAA

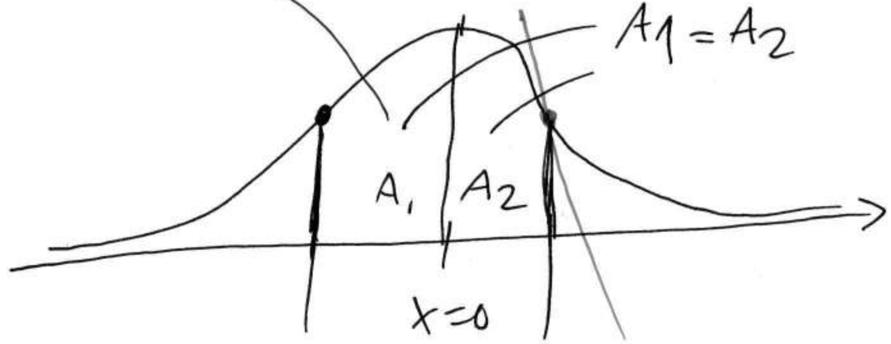


NORMAALI JAKAUMA $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad$ (8-6)

KOKO ALA = 1

$A = ?$

MAKSIMI



$f'(x) = 0 \iff x = 0 \Rightarrow$ ÄÄRIARVO (MAKSIMI)

$f''(x) = 0 \iff x = 1$ TAI $x = -1$ (KÄÄNNEPISTE)

$-1 \qquad 1$

KÄÄNNEPISTEET $x = \pm\sigma$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \dots$$

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \Big/_0^1 x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}$$

PERUS LASKIN

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right) = 0.68 = 68\,\%$$

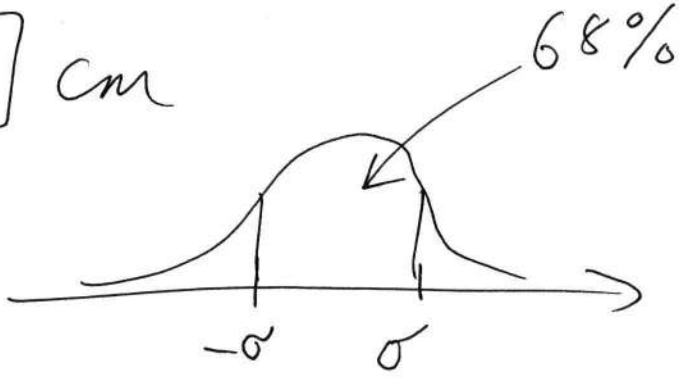
EI TARVITTU MAOL-TAULUKOIDEN KERTYMÄFUNKTION ARVOJA

ESIM. IHMISISTÄ PITUUDELTAAN VÄLILLÄ

$$\left[177-7,\ 177+7\right] \text{ cm}$$

$$= \left[\cancel{177}\,170,\ 184\right] \text{ cm}$$

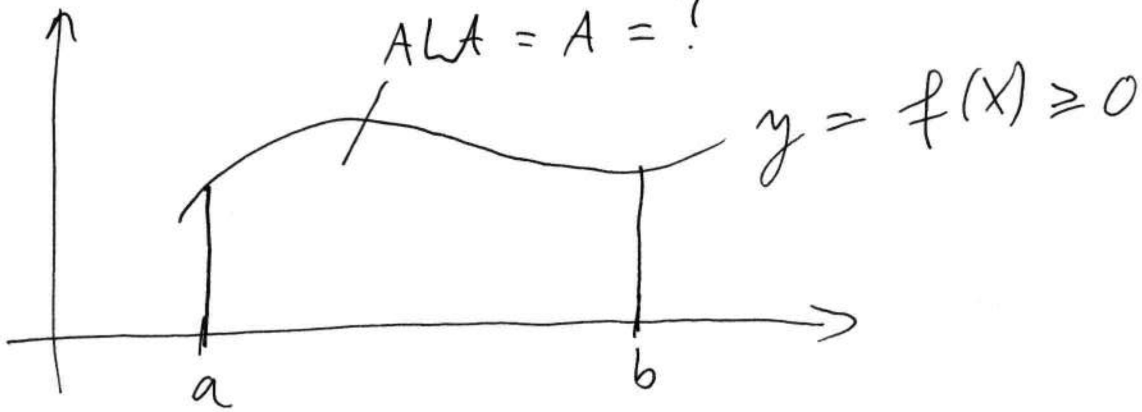
ON 68%



INTEGRAALI

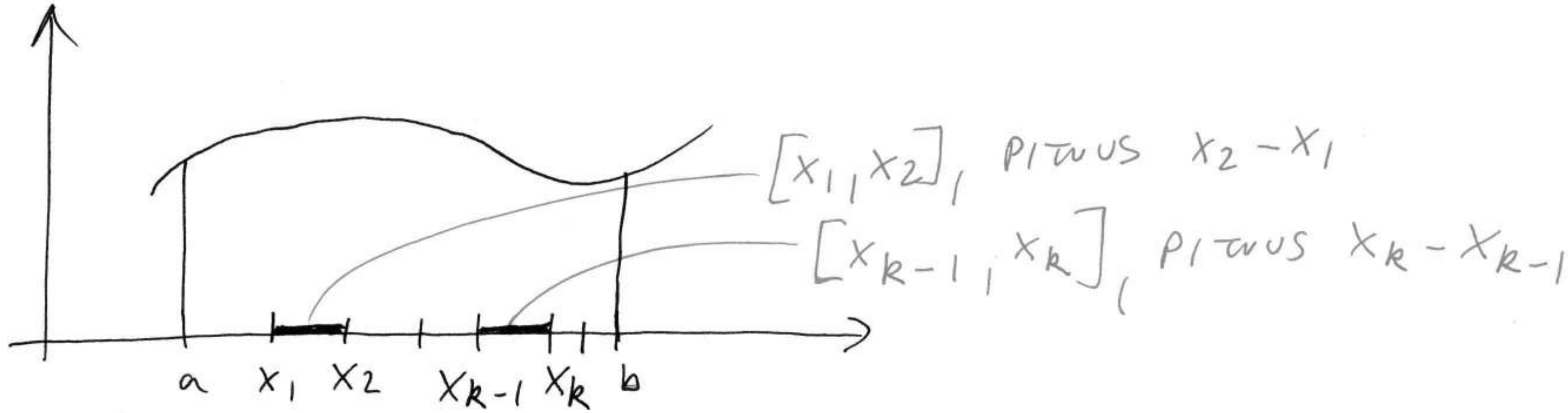
MÄÄRITELMÄ JA OMINAISUUDET

OLKOON $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ JATKUVA.



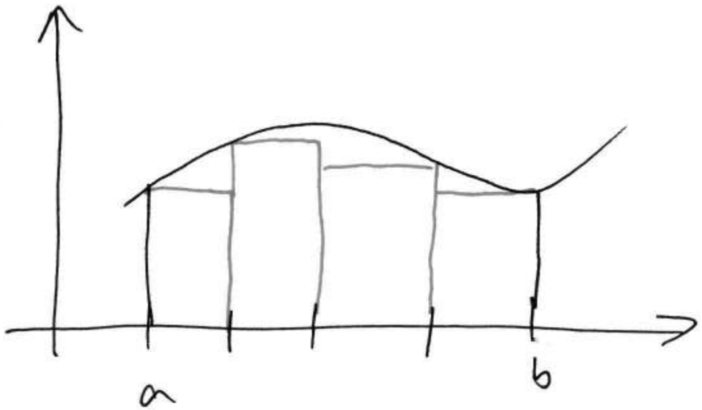
JAETAAN $[a, b]$ JAKOPISTEILLÄ:

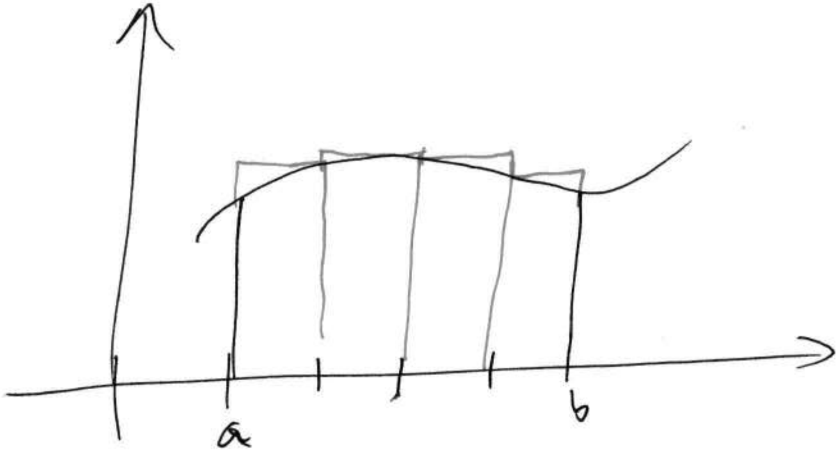
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$



MERKITÄÄN $m_k = \min_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$

$$M_k = \max_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$$





ALASUMMA

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

YLÄSUMMA

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

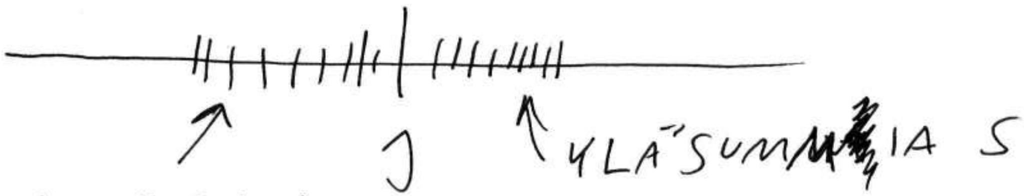
PÄTEE:
- VAIKKA JAKOPISTEET OLISIVAT ERILAISIA, NIIN AINA $s \le S$
- KUN JAKO TIHENEE, NIIN s KASVAA JA S PIENENEE

LAUSE. JOS $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ON JATKUVA, NIIN JOKAISTA $\varepsilon > 0$ VASTAA SELLAINEN JAKO, ETTÄ $S - s \leq \varepsilon$. TÄLLÖIN ON OLEMASSA 1-KÄSITTEINEN LUKU $I \in \mathbb{R}$, JOLLE $s \leq I \leq S$ KAIKILLE

"ISO ii"

VÄLIN $[a,b]$ JAOILLE.

MÄÄRITELMÄ. LUKU I ON FUNKTION f (MÄÄRÄTTY) INTEGRAALI VÄLILLÄ $[a,b]$, MERKITÄÄN $\int_a^b f(x)\,dx = I$.



ALASUMMIA s EROTUS $S - s$ VOI OLLA MIELIVALTAISEN PIENI
$\Rightarrow$ VÄLIIN JÄÄ 1-KÄSITTEINEN LUKU I.

SOPIMUS:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{AINA}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

OMINAISUUKSIA

① LINEAARISUUS:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = \int_a^b c_1 f(x)\,dx + \int_a^b c_2 g(x)\,dx$$

$$= c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

② $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

RIIPPUMATTA PISTEIDEN a, b, c JÄRJESTYKSESTÄ

③ $f(x) \le g(x)$ VÄLILLÄ $[a, b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

ERITYISESTI. $f(x) \le |f(x)|$ $\forall x$

$-f(x) \le |f(x)|$

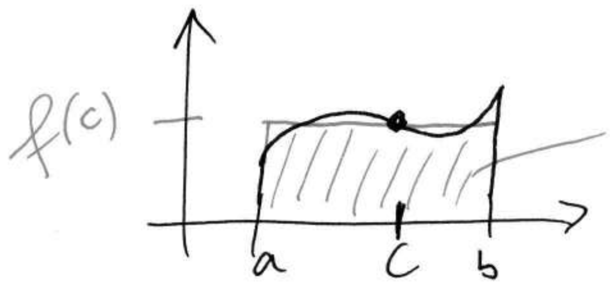
$$\Rightarrow \pm \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{AINA}$$

KESKIARVO-OMINAISUUS

OLKOON $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ JATKUVA, SILLOIN ON OLEMASSA $c \in [a,b]$, JOLLE

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f\text{:n KESKIARVO VÄLILLÄ } [a,b] = \bar{f}$$



SUORAKULMION ALA

$= \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

<u>SYY</u>: MERKITÄÄN $m = \min_{a \le x \le b} f(x)$

$$M = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

f JATKUVA $\Rightarrow$ f SAA KAIKKI ARVOT MINIMIN m JA MAKSIMIN M VÄLISSÄ

$\Rightarrow$ JOLLAKIN $c \in [a,b]$ PÄTEE $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

ANALYYSIN PERUSLAUSE

- VASTAA KYSYMYKSEEN, MITEN INTEGRAALEJA KÄYTÄNNÖSSÄ LASKETAAN
- TULOS; f JATKUVA

$\Rightarrow$ ON OLEMASSA INTEGRAALIFUNKTIO F,

JOLLE $F'(x) = f(x)$ KAIKILLA x,

TÄLLÖIN MERKITÄÄN $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

LAUSE, f JATKUVA

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{TOTEUTTAA} \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

JOS $G'(x) = f(x)$, NIIN

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} G(x) = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b = \Big[G(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

↑SUOMESSA

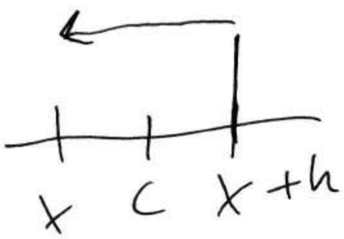
PERUSTELU:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}_{} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{h}\cdot f(c)\left(\cancel{x}+h-\cancel{x}\right)$$

KESKIARVO-OMINAISUUS

$h \to 0$



$= f(c) \to f(x)$, kun $h \to 0$. Siis $F'(x) = f(x)$.