TÄMÄN KURSSIN DIFYHTÄLÖT

- SEPAROITUVAT YHTÄLÖT

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

ESIM. $y' = \frac{x^2}{y e^{y^2}}$ ($y' = \frac{dy}{dx}$) $\Rightarrow$ JOS OSATAAN INTEGROIDA JA RATKAISTA y, NIIN SAADAAN $y = \ldots$

$$y e^{y^2}\,dy = x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int y e^{y^2}\,dy = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int 2y\, e^{y^2}\,dy = \frac{x^3}{3} + C \quad \| \cdot 2$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\, e^{y^2} = \frac{2x^3}{3} + C \quad \| \ln(\,)$$

$$\Rightarrow y^2 = \ln\left(\frac{2x^3}{3} + C\right) \quad \| \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\ln\left(\frac{2x^3}{3} + C\right)}, \quad C \text{ VAKIO}$$

• LINEAARISET 1-KERTALUVUN YHTÄLÖT

~~[illegible]~~ $y' + p(x)\, y = q(x)$

2 TAPAA RATKAISTA

① INTEGROIVA TEKIJÄ JOKA JOHTAA RATKAISUKAAVAAN

KERROTAAN PUOLITTAIN TEKIJÄLLÄ $e^{\int p(x)\,dx}$ (INTEGROIVA TEKIJÄ)

$$\Rightarrow \quad y' e^{\int p(x)\,dx} + \underbrace{p(x)\, e^{\int p(x)\,dx}}\, y = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

TÄMÄ ON

$$\frac{d}{dx} e^{\int p(x)\,dx}\, y$$

VASEN PUOLI ON

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int p(x)\,dx}\right) = y' e^{\int p(x)\,dx} + y\, p(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

ESIM. $\frac{d}{dx} e^{\sin x + x^2}$

$= (\cos x + 2x)\, e^{\sin x + x^2}$

SAMOIN $\frac{d}{dx} e^{f(x)}$

$= f'(x)\, e^{f(x)}$.

NYT JOS $f(x) = \int p(x)\,dx$

NIIN $f'(x) = p(x)$

SAATIIN YHTÄLÖ MUOTOON

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int p(x)\,dx}\right) = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} \quad \Big\|\ \text{INTEGROIDAAN PUOLITTAIN}$$

11-3

$$\Rightarrow \quad y\, e^{\int p(x)\,dx} = \int \left(q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\right) dx \quad \Big\|\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int \left(q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\right) dx + C\right]}$$

$$e^{a}\cdot e^{-a} = e^{a-a} = e^{0} = 1$$

MUISTETAAN INTEGROIMISVAKIO

RATKAISUKAAVA YHTÄLÖLLE

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

ESIMERKKI.

$$y' \underbrace{-2x}_{p(x)}\, y = \underbrace{6x}_{q(x)}$$

$$p(x) = -2x$$

$$\Rightarrow \int p(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)\,dx} = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} = \int 6x\, e^{-x^2}\,dx = -3\int(-2x)\,e^{-x^2}\,dx = -3e^{-x^2}$$

RATKAISU ON

$$y = e^{x^2}\left[-3e^{-x^2} + C\right], \quad C \text{ VAKIO}$$

② YHTÄLÖN $y' + p(x)\,y = q(x)$ VOI RATKAISTA MYÖS KÄYTTÄMÄLLÄ LINEAARISTEN YHTÄLÖIDEN OMINAISUUKSIA.

LINEAARISELLA HOMOGEENISELLA DIFYHTÄLÖLLÄ ON KERTALUVUN VERRAN LINEAARISESTI RIIPPUMATTOMIA ("ERILAISTA") RATKAISUJA

ESIM. $y' + p(x)\,y = 0$ KAIKKI RATKAISUT MUOTOA $C_1 y_1(x)$, C_1 VAKIO

$y'' + ay' + by = 0$

RATKAISUT $\begin{cases} y_1(x) \\ y_2(x) \end{cases}$ $\Rightarrow$ KAIKKI RATKAISUT MUOTOA

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y''' + ay'' + by' + Cy = 0$

LÖYTYY RATKAISUT $\begin{cases} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{cases}$

KAIKKI RATKAISUT MUOTOA

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$

YHTÄLÖN $y' + p(x)\,y = q(x)$ (EH) ← EPÄHOMOGEENINEN

RATKAISU SAADAAN SITEN, ETTÄ

- ETSITÄÄN HOMOGEENIYHTÄLÖN

$$y' + p(x) = 0 \quad (H)$$

RATKAISU $C_1 y_1(x)$

- LISÄTÄÄN TÄHÄN YKSI (EH):N RATKAISU $y_0(x)$ (ARVAAMALLA, KOKEILEMALLA, TAI MUULLA TAVALLA SAATU)

$\Rightarrow$ (EH):N KAIKKI RATKAISUT MUOTOA

$$y(x) = C_1 y_1(x) + y_0(x)$$

ESIM. $y' - 2xy = 6x$ (EH)

$$y' - 2xy = 0 \quad (H)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + C \quad \| e^{(\,)}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{x^2+C} = e^{x^2}\underbrace{e^C}_{=A>0}$$

$$\Rightarrow |y| = A e^{x^2} \quad \| \cancel{A>0}$$

$$\Rightarrow y = A e^{x^2}$$

SIIS (H):N RATKAISUT $y_1(x) = Ae^{x^2}$, A VAKIO (11 - 7a)

TARVITAAN YKSI RATKAISU (EH):LLE, JOKA ON

$$y' - 2xy = 6x$$

NÄYTTÄVÄT SAMOILTA

HÄVIÄÄ

y = VAKIO

$\Rightarrow y' = 0$

ARVATAAN $y = -3$

$$\Rightarrow y' = 0 \quad \Rightarrow y' - 2xy \stackrel{?}{=} 0 - 2x(-3) = 6x \quad \text{ok}$$

SIIS YHTÄLÖN $y' - 2xy = 6x$

KAIKKI RATKAISUT OVAT $\underline{\underline{y(x) = Ae^{x^2} - 3}}$, A VAKIO

11–7b

TARKASTELLAAN YHTÄLÖÄ

- LINEAARINEN
- 2-KERTALUVUN
- VAKIOKERTOIMINEN
- HOMOGEENINEN

$$y'' + ay' + by = 0,$$

a, b VAKIOITA

YRITE.

$$y = e^{\lambda x}$$

(λ "LAMBDA")

$$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

SIJOITTAMALLA YHTÄLÖÖN SAADAAN

$$y'' + ay' + by = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x}$$

$$= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{= p(\lambda) \text{ KARAKTERISTINEN POLYNOMI}} = 0$$

SIIS $y = e^{\lambda x}$ ON RATKAISU, JOS JA VAIN JOS $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

KOLME ERI TILANNETTA

DIF YHT RATKAISU

① $a^2 - 4b > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-4b}}{2} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2-4b}}{2}$

② $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{2} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

TOINEN RATKAISU, TARKISTETAAN KOHTA.

③ $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow$ KOMPLEKSISET JUURET

$\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ (✱)

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

(i ON IMAGINAARIYKSIKKÖ

$(i)^2 = -1$)

$\boxed{\text{EULER: } e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x}$

α PERUSTELU

$(11-9)$

RATKAISUT $\quad y = e^{\lambda x}$

EULER

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

RATKAISUJA

NYT $\quad y_1 + y_2 = 2\underline{e^{\alpha x} \cos \beta x}$

$$\frac{y_1 - y_2}{i} = 2 \cancel{i}\, \underline{e^{\alpha x} \sin \beta x}$$

ESIM.

1

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \\ \lambda_2 = 2 & \qquad = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{array}}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3 & p(\lambda) = (\lambda-3)^2 \\ \lambda_2 = 3 & \qquad = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \end{array}}$$ POHDINTA

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \qquad \Rightarrow y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}}}$$

TARKISTUS, ETTÄ $y = xe^{3x}$ ON MYÖS RATKAISU

11 – 11

$$y' = e^{3x} + 3xe^{3x}$$

$$y'' = \underbrace{3e^{3x} + 3e^{3x}}_{6e^{3x}} + 9xe^{3x}$$

$$\Rightarrow y'' - 6y' + 9y$$

$$= 6e^{3x} + 9xe^{3x} - 6(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 9e^{3x} = 0 \quad \text{ok}$$

-18

$(2+i)(2-i) = 5$

③ $\begin{cases} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{cases}$ $\quad p(\lambda) = (\lambda - (2+i))(\lambda - (2-i)) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$

$$y'' - 4y' + 5 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 + i \cdot 1 \\ \lambda_2 = 2 - i \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$$

EKSAKTIT DIFYHTÄLÖT

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{EKSAKTI}$$

$\Longleftrightarrow$ LÖYTYY f JOLLE $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ JA $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f}_{N} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

- FUNKTION f ETSIMINEN

ESIM. $\underbrace{(2xy^3 + 4x^3)}_{=M}\,dx + \underbrace{(3x^2y^2 + 7y^6)}_{=N}\,dy = 0 \quad (**)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 6xy^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6xy^2 \end{aligned}\right\} \text{SAMAT, LÖYTYY } f$$

$$M = 2xy^3 + 4x^2 \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = x^2y^3 + x^4 + C(y)$$ (11-13)

$$N = 3x^2y^2 + 7y^6 \xrightarrow{\int dy} f(x,y) = x^2y^3 + y^7 + C(x)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^3 + x^4 + y^7$$

(*) RATKAISU $f = x^2y^3 + x^4 + y^7 = C$ = VAKIO

[ESIM. $x^2 + y^2 = C$]