

IMPLISIITTISET FUNKTIOT

TASOKÄYRÄT JA EKSAKTIT YHTÄLÖT

KERTAUSTA JA
VASTAUKSIA
KYSYMYKSIIN

12-1

EKSPLISIITTIINEN YHTÄLÖ, ILMAISTAA y MUUTTUJAN x
FUNKTIONA

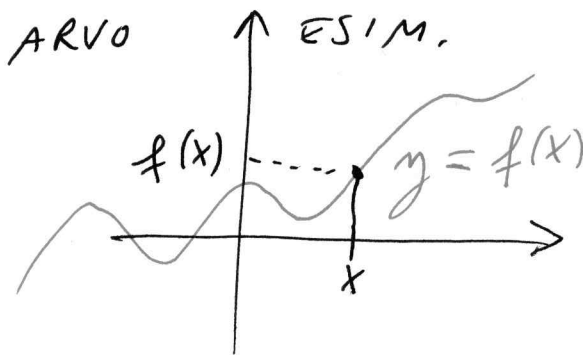
ESIM. $y(x) = \ln(x) + x^2$

y ON AVATTU
NÄKYVIIN

JOS SIJOITETAAN x :N ARVO,
SAA DAAN HETI TIETÄÄ y :N ARVO

MUOTOA $y = \dots$

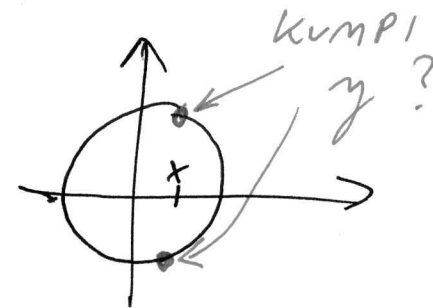
JOKAISTA x VASTAA
KORKEINTAAN YKSI y :N
ARVO



IMPLISIITTIINEN YHTÄLÖ MYÖS y ON JONKIN FUNKTION SISÄSSÄ:

ESIM. (a) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1-x^2}$

MONI-
KÄSITTEISYYTTÄ



(b) $\int_0^y e^{-x^2} dx = \ln(x)$

\leftarrow y ON HAVKALA?
RATKAISTA

b) EHKÄ $\frac{d}{dx} \int_0^{y(x)} e^{-x^2} dx = e^{-y(x)^2} y'(x) = (6)x$
 PÄÄ

12-2

TÄYTYY RATKAISTA
 NUMEERISESTI.

IMPLISIITTISET YHTÄLÖT OVAT TÄRKEITÄ, KOSKA
 JOITAKIN ASIOITA VOI ESITTÄÄ VAIN NIIDEN AVULLA.
 ESIM. TASOKÄYRÄT, KUTEN $x^2 + y^2 = 1$.

ESIM. $x^2 + y^2 = 1$, TANGENTTI, KUN $x > 0, y > 0$?

IMPLISIITTINEN DERIVOINTI $y = y(x)$

$$\Rightarrow x^2 + y(x)^2 = 1 \quad \parallel \frac{d}{dx}$$

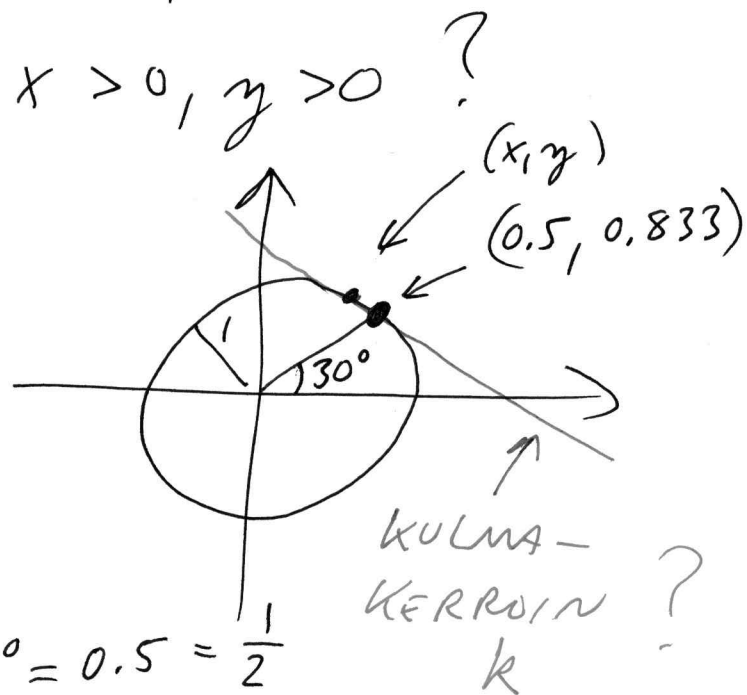
$$\Rightarrow 2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{0.5}{0.833}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = k$$

$$x = \sin 30^\circ = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.833$$



TOISAALTA, VOIDAAN TEMDÄ PARAMETRISITYS

12-3

(x, y) käyrällä ~~$x^2 + y^2 = 1$~~ $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

ESIM. $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

SIIIS $f(x(t), y(t)) = 1 = \text{VAKIO} \parallel$ DERIVOIDAAN $\frac{\partial}{\partial t}$
 t :N SUHTEEN $\frac{\partial}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \parallel \cdot dt$

OSITTAIN -
DERIVAATTA

$m(x, y)$

$n(x, y)$

M JA N

MÄÄRITELTY
NÄIN, SIIIS

$\Rightarrow df = m(x, y) dx + n(x, y) dy = 0$

tämä yhtälö
ON EKSAKTI,

EN TÄI, JOS ON ANNETTU JOKKO YHTÄLÖ

12-4

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy$$

JOKA EI VÄLTTÄMÄTTÄ TULE MISTÄÄN KÄYRÄSTÄ,

VAAK ESIM. ~~M~~ M JA N OVAT

ITSE KEKSITTYJÄ

- ESITTÄÄKÖ YHTÄLÖ KÄYRÄÄ? — EN TIEDÄ?
- VOIDAANKO YHTÄLÖ RATKAISTA? — EN OLE VARMA, LUULISIN ETÄ VOIDAAN
- VOIDAANKO YHTÄLÖ MUUTTAA EKSAKTIKSI, ESIM,

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad \parallel \cdot M(x,y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{M(x,y)M(x,y)}_{M_2(x,y)} dx + \underbrace{N(x,y)M(x,y)}_{N_2(x,y)} dy = 0$$

"mää" JOKU SOPIVA FUNKTIO

$$M_2(x,y)$$

$$N_2(x,y)$$

WIKIPEDIA :

$$M, N, M$$

HANKALAA, PAITSI JOS OVA T X: N FUNKTIOITA :

$$m(x) dx + n(x) dy = 0$$

12-5

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{m(x)}{n(x)}$$

SEPAROITUVAA YHTÄLÖ

TAI $n(x) y' + 0 \cdot y = -m(x) \Rightarrow y' + p(x)y = q(x)$

↑
?

↑

INTEGROIVA TEKIJÄ

JOS OULSIKUN ^{-n(x)}

$$-m(x, y) = p(x)y - q(x)$$

TULISI

$$\Rightarrow n(x) y' = -n(x) p(x)y + n(x) q(x) \quad || : n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

INTEGROIVA
TEKIJÄ

$$m(x, y) dx + n(x, y) dy$$

VOIDAAN RATKAISTA AINAKIN, JOS
 $n(x, y) = n(x)$
 MUUTEN EPÄLINEAARINEN YHTÄLÖ

TENTISSÄ: KUINKA TARKASTI MÄÄRITTELYEHDOT
TAI ESIM. TAYLORIN VIRHETERMÄ

12-6

HYVÄ AJATUS: SAMOIN KUIN LASKUHARJOITUKSISSA

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

SIJOITUKSIA

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin t dt}{\sqrt{\sin^2 t}}$$

$$x = \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$x = 1 \iff t = 0$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin t dt}{\sin t}$$

OIKEASTI

$$|\sin t| = \sin t$$

SIN(t) POSITIIVINEN, KUN

$$0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -1 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

TÄLLÄ ISÄ TRIG. SIJOITUSTA EI LUVUTAVASTI,
 TULE TENTTIIN, KÄSITELTY VÄHÄN.

JOS INTEGRALISSA ON JOKIN MONIMUTKAISEN LAUSEKE, NIIN VOI SITA MERKITÄ JOLLAKIN MUUTTOJALLA \Rightarrow INTEGROI MINEN SIJOITAMALLA

12-8

ESIM. $\int_0^1 (x^3 + x) \ln(x^2 + 1) dx$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= x(x^2+1)} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{= u}$

KOSKA NÄYTTÄÄ?
HANKALAC TA

$$x^2 + 1 = u \quad x = 0 \Leftrightarrow u = 1$$

$$2x dx = du \quad x = 1 \Leftrightarrow u = 2$$

~~7/8~~ *

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

RATKAISU:

12-9

KEKSI TÄIN ESIMERKKI

$$f(x,y) = x^3 y^5 - x y^7 \Rightarrow$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^5 - y^7 - 1$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3 y^4 - 7xy^6$$

ESIM. $(3x^2 y^5 - y^7 - 1) dx + (5x^3 y^4 - 7xy^6) dy = 0$

ONKO EKSAKTI? $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \cancel{15x^2 y^4} - 7y^6 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 15x^2 y^4 - 7y^6 \end{array} \right\} \text{SAMAT!}$
ON EKSAKTI YHTÄLÖ.

$$\begin{array}{l} M = 3x^2 y^5 - y^7 - 1 \xrightarrow{\int dx} x^3 y^5 - x y^7 - x + C(y) \\ N = 5x^3 y^4 - 7xy^6 \xrightarrow{\int dy} x^3 y^5 - x y^7 + C(x) + 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M \\ N \end{array}} \right\} = f(x,y)$$

SAADAA $C(y) = 0$, $C(x) = -x$ JA

$$f(x,y) = x^3 y^5 - x y^7 - x = \text{VAKIO}$$