Teoriaa differentiaaliyhtälöistä

Eero Ketola

Tärkeitä kaavoja:

(1) Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{Esim.}: \frac{d}{dx}(x^2e^x) = 2x\cdot e^x + x^2e^x$$

(2) Sisäkkäisten funktioiden derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

$$\text{Esim.} \frac{d}{dx}(\sin(e^x)) = \cos(e^x)\, e^x$$

1. kertaluvun lineaarinen DY:

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Tämä on lineaarinen yhtälö, sillä yhtälössä on y:iden edessä ainoastaan x:n funktioita.

Ratkaisu:
Seuraava ei tunnu ehkä vielä intuitiiviselta, mutta etsitään $u(x)$ niin, että $u'(x) = p(x)$. Tämä löytyy integroimalla: $u(x) = \int p(x)dx$. $u(x)$:ssä ei tarvitse olla vakiotermiä $+C$, sillä tavoitteena oli vain, että $u'(x) = p(x)$

Nyt kerrotaan DY puolittain $e^{u(x)}$:llä.

$$e^{u(x)}y' + e^{u(x)}p(x)y = e^{u(x)}f(x)$$

Nyt huomataan, että : $\frac{d}{dx}\big(e^{u(x)}y\big) = \frac{d}{dx}\big(e^{u(x)}\big)y + e^{u(x)}\frac{d}{dx}(y) = e^{u(x)}p(x)y + e^{u(x)}y'$

Huomataan, että tämähän **on** tuo DY:n vasen puoli. Eli:

$$\frac{d}{dx}\big(e^{u(x)}y\big) = e^{u(x)}f(x)$$

Nyt yhtälö on mielenkiintoisella tavalla separoitava:

$$d\big(e^{u(x)}y\big) = e^{u(x)}f(x)\,dx \quad ||\int$$

$$\int 1\, d\big(e^{u(x)}y\big) = \int e^{u(x)}f(x)\,dx$$

Huomaa, että tässä välivaiheessa integroidaan $d\big(e^{u(x)}y\big)$ suhteen. Eli integroitaessa saadaan:

$$e^{u(x)}y = \int e^{u(x)}f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{\int e^{u(x)}f(x)\,dx}{e^{u(x)}}$$

2. kertaluvun vakiokertoiminen ja homogeeninen lineaarinen DY

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$$

Vakiokertoiminen eli a, b, c ovat vakioita. Homogeeninen, eli yhtälössä ei ole erillistä x:n funktiota. Käytännössä siis yhtälön oikea puoli on 0.

Ratkaisu:

Tämäkin ratkaisu alkaa melko epäintuitiivisesti. Tehdään arvaus eli nk. yrite: $y = e^{\lambda x}$. Kun tätä sisäkkäistä funktiota derivoidaan, saadaan:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{ja} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Yhtälö nyt saadaan muotoon:

$$a \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + b \cdot \lambda e^{\lambda x} + c \cdot e^{\lambda x} = 0 \quad | \text{ Tästä otetaan tekijäksi } e^{\lambda x}$$
$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$$

Nyt huomaamme, että $e^{\lambda x} \neq 0$ jokaisella λ, x arvolla, vaikka nämä olisivat jopa kompleksisia. Eli tulon nollasäännön ja 2. asteen yhtälön ratkaisukaavan perusteella:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nyt olemme ratkaisseet λ niin, että $y = e^{\lambda x}$ on yhtälön ratkaisu näillä ratkaistuilla arvoilla. Tässä tosin on kolme omanlaista mahdollista tapausta:

1. λ:lla on kaksi erisuurta reaaliratkaisu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin yhtälön yleinen ratkaisu on:
$$y = C \cdot e^{\lambda_1 x} + D \cdot e^{\lambda_2 x}$$

2. λ:lla on yksi ratkaisu. Näin käy, jos $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$. Tällöin yhtälön yleinen ratkaisu on:
$$y = C \cdot xe^{\lambda x} + D \cdot e^{\lambda x}$$

3. λ:lla on kaksi erisuurta kompleksista ratkaisua, eli $\lambda = a \pm b \cdot i$. Tällöin ratkaisu on:
$$\lambda = C \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx) + D \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

Näistä 2 ja 3 ovat hieman erikoisempia tapauksia.

2 seuraa siitä, että tässä tapauksessa voimme käyttää integroivan tekijän menetelmää melko samaan tapaan kuin 1. asteen lineaarisissa DY:issä. Näissä siis karakteristinen yhtälö on kaksoisjuuren vuoksi muotoa: $(\lambda - a)^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2$ eli itse DY on muotoa $y'' - 2ay + a^2 y = 0$. Tämän muotoisen ja vain tämän muotoisen DY:n voi ratkaista seuraavasti:

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-ax}y) = \frac{d}{dx}(-ae^{-ax}y + e^{-ax}y') = a^2 e^{-ax}y - ae^{-ax}y' - ae^{-ax}y' + e^{-ax}y''$$
$$= e^{-ax}y'' - 2ae^{-ax}y' + a^2 e^{-ax}y = 0 \Leftrightarrow y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}(e^{-ax}y) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-ax}y) = C \Rightarrow e^{-ax}y = Cx + D \Rightarrow y = Cxe^{ax} + De^{ax}$$

3 seuraa kompleksilukujen käyttäytymisestä. Lyhyesti $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i \cdot \sin(b))$.

$$\lambda = a \pm bi \Rightarrow y = c \cdot e^{a+bi} + d \cdot e^{a-bi} = c \cdot e^a(\cos(b) + i\sin(b)) + d \cdot e^a(\cos(-b) + i\sin(-b))$$
$$= ce^a \cos(b) + i\, ce^a \sin(b) + d\, e^a \cos(b) - d\, i \sin(b) = (c + d)e^a \cos(b) + i(c - d)e^a \sin(b)$$
$= Ce^a \cos(b) + De^a \sin(b)$. Tässä käytettiin $\sin(-b) = -\sin(b)$, $\cos(-b) = \cos(b)$.

2. kertaluvun lineaarinen, vakiokertoiminen, epähomogeeninen DY:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$$

Tämä on muuten sama kuin aiempi, mutta epähomogeeninen, eli oikealla puolella meillä on $f(x)$ sen sijaan, että siellä olisi 0.

Ratkaisu:

Tämä ratkaistaan melko samalla tapaa kuin aiempi homogeeninen tapaus. Meidän täytyy ensin löytää yksittäinen ratkaisu y_1, joka ratkaisee itse epähomogeenisen yhtälön. Eli:

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = f(x)$$

Tämä täytyy käytännössä arvata. Tähän löytyy hyviä taulukoita internetistä, mutta esim. jos $f(x)$ on polynomi niin y_1 on myös polynomi.

Kun y_1 on löydetty, ratkaistaan homogenisoitu versio yhtälöstä eli $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$. Tämä tehdään ihan samoin kuin aiemmin. Tästä saadaan joku seuraavanlaisista ratkaisuista:

1. $y_2 = ce^{\lambda_1 x} + de^{\lambda_2 x}$
2. $y_2 = cxe^{\lambda x} + de^{\lambda x}$
3. $y_2 = ce^{a} \sin(b) + de^{a} \cos(b)$

Kussakin näistä tapauksista, ratkaisuun vain lisätään y_1 suoraan, eli yleinen ratkaisu on

$$y = y_1 + y_2$$

Syy, miksi tämä toimii, on, että y_1 ratkaisee epähomogeenisen yhtälön ja y_2 homogeenisen. Jos nyt tämän ratkaisun sijoittaa alkuperäiseen yhtälöön saadaan:

$$ay'' + by' + cy = a(y_1'' + y_2'') + b(y_1' + y_2') + c(y_1 + y_2)$$
$$= (ay_1'' + by_1' + cy_1) + ay_2'' + by_2' + cy_2$$

Näistä $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ ja $(ay_1'' + by_1' + cy_1) = f(x)$, aiemmin ratkaistujen tulosten perusteella. Eli kokonaisuudessaan:

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$