MS-A0102 Differentiaali ja integraalilaskenta 1 **Huusko**

Tehtävät 1, ma 15.5. - pe 19.5.

Tavoite:

- tehtävät 1-4 käydään läpi alkuviikon harjoitustilaisuudessa (ma klo 14-16, lähiopetus)
- tehtävät 5-7 käydään läpi loppuviikon harjoitustilaisuudessa (ke klo 9-11, online)
- tehtävät 8-10 palautetaan MyCourses-alustalle

Harjoitustehtäviin liittyvää materiaalia löytyy kurssikirjasta

Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition) luvuista 9.1 ja 9.2

1. (a) Määrää seuraavien jonojen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 5 ensimmäistä termiä kun
   i. $a_n = n + (-1)^n$
   ii. $a_n = \frac{2n}{2n+1}$
   iii. $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   (b) Määrää seuraavien jonojen yleinen termi
   i. $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \ldots$
   ii. $1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9, \ldots$
   iii. $1/2,\ -1/4,\ 1/6,\ -1/8,\ 1/10, \ldots$

2. Mitkä seuraavista jonoista $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenevat? Myönteisessä tapauksessa määrää jonon raja-arvo.
   (a) $\frac{(-1)^n}{n}$
   (b) $\frac{1}{n} + \ln n$
   (c) $3 + \mathrm{e}^{-2n}$
   (d) $\frac{2^n}{3^n}$
   (e) $\frac{\sin n}{n}$
   (f) $n \sin \frac{1}{n}$
   (g) $\cos(\pi n)$
   (h) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$

3. Olet harkitsemassa uuden tai kaksi vuotta vanhan auton hankkimista sen perusteella kumpi tulee halvemmaksi uudelleenmyytynä kolmen käyttövuoden jälkeen. Arvioinnissa huomioidaan auton arvonlasku ja korjauskustannukset. Oletetaan, että uusi auto maksaa 20 000e ja menettää 12% arvostaan joka vuosi. Korjauskulut ovat 400e vuodessa ja ne kasvavat 18% joka vuosi.

   (a) Määrää uuden auton vuosittaista arvonlaskua esittävän jonon $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ kolme ensimmäistä termiä. Määrää palautuskaava yleiselle termille d_n.

(b) Määrää uuden auton vuosittaisia korjauskuluja esittävän jonon $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ kolme ensimmäistä termiä. Määrää palautuskaava yleiselle termille r_n.

(c) Mitä tämän perusteella maksaa omistaa uusi auto kolmen vuoden ajan?

(d) Jos auto hankitaan kaksi vuotta vanhana, mitä maksaa sen pitäminen kolmen vuoden ajan? Kumpi kannattaa tämän perusteella ostaa?

4. Tarkastellaan Fibonaccin jonoa $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, joka määräytyy ehdosta

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ kun } f_1 = 1, \ f_2 = 1.$$

(a) Määrää jonon 12 ensimmäistä termiä.

(b) Olettaen tunnetuksi, että pätee

$$\lim_{n \to \infty} f_{n+1}/f_n = r \in (0, \infty),$$

osoita, että pätee $r^2 = r + 1$. Määrää r.

(c) Oletetaan, että pätee $r^2 = r + 1$. Osoita, että jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ alkioille $a_n = Ar^n$ (A on vakio) pätee Fibonaccin yhtälö

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ kun } n > 2$$

(d) Olettaen tunnetuksi Binetin kaava

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

osoita b)-kohdan oletus oikeaksi.

5. Etsi seuraavien jonojen (rekursiivinen) palautuskaava.

(a) $1, \ 5, \ 14, \ 30, \ 55, \dots$

(b) $1, \ 3, \ 6, \ 10, \ 15, \dots$

(c) $1, \ 2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{8}{5}, \ \frac{13}{8}, \dots$

6. Anna esimerkki

(a) nousevasta jonosta, jonka raja-arvo on 0.

(b) monotonisesta jonosta joka ei suppene.

(c) geometrisesta sarjasta, jossa esiintyy sama termi useammin kuin yhden kerran.

(d) äärellisestä geometrisesta sarjasta, jonka summa on 10.

(e) äärettömästä geometrisesta sarjasta, jonka summa on 10.

7. (a) Oletetaan, että avaat ensi vuoden alussa talletustilin tallettamalla 1000e ja jatkat talletuksia säännöllisesti kerran vuodessa samaan aikaan. Talletustilin vuosikorko on 5% ja se hyvitetään vuoden vaihteessa.

i. Mikä on tilin saldo kymmenen vuoden päästä välittömästi yhdennentoista talletuskerran jälkeen?

ii. Mitä tapahtuu kun talletuskertojen lukumäärä $n \to \infty$?

(b) Oletetaan, että Tuusulanjärveen aletaan joka päivä pumpata 8 tonnia uutta jätettä. Nykyaikaisilla puhdistusmenetelmillä saadaan joka päivä poistettua 25% tämän jätteen kokonaismäärästä. Anna pitkän aikavälin arvio järveen jäävän jätteen määrästä.

Palautettavat tehtävät

8. Määrää sarjan summa tai osoita, että se hajaantuu

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$

9. Tutkitaan Calkin-Wilf-Newman-sarjana tunnettua jonoa. Jono on kiinnostava, koska siinä esiintyy jokainen positiivinen rationaaliluku täsmälleen kerran. Jokainen reaaliluku x voidaan esittää muodossa $x = A + B$, missä A on kokonaisluku ja $B \in [0, 1)$. Esimerkiksi luvulle $x = 12/5 = 2+2/5$, $A = 2$ ja $B = 2/5$. Luvulle $x = 3 = 3+0$, $A = 3$ ja $B = 0$. Määritellään funktio f asettamalla
$$f(x) = A + (1 - B).$$

   (a) Määrää $f(x)$ kun $x = 25/8$ ja $x = 13/9$.

   (b) Määrää ensimmäiset kuusi termiä palautuskaavalla
$$a_n = 1/f(a_{n-1}), \text{ kun } n > 1 \text{ ja } a_1 = 1$$
   määritellystä Calkin-Wilf-Newman-sarjasta.

10. Määrää annettujen sarjojen summa. Millä muuttujan arvoilla sarjat suppenevat?

   (a) $1 + z/2 + z^2/4 + z^3/8 + \cdots$

   (b) $2 - 4z + 8z^2 - 16z^3 + \cdots$

   (c) $4 + z + z^2/3 + z^3/9 + \cdots$

   (d) $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$