

Viikon aiheet liittyvät **potenssisarjoihin, jatkuvuuteen, derivaattaan ja alkeisfunktioihin**. Harjoitustehtäviin liittyvää materiaalia löytyy kurssikirjasta **Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition)** luvuista **9.5, 9.6, 1. ja 2.**

Alkuviikko

1. Tutki sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$ suppenemista muuttujan $x \in \mathbb{R}$ eri arvoilla.
2. Tarkastelemalla potenssisarjakehitelmää

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

joka on voimassa välillä $(-1, 1)$, muodosta annettujen funktioiden muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ olevat kehitelmät. Missä ne ovat voimassa?

- (a) $x \mapsto \frac{1}{2-x}$
- (b) $x \mapsto \frac{1}{(2-x)^2}$
- (c) $x \mapsto \ln(2-x)$
- (d) $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$

3. Tarkastellaan ehdon

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}$$

määräämää funktiota f .

- (a) Mikä on funktion f määrittelyjoukko?
 - (b) Onko mahdollista määritellä f niin, että siitä tulee koko reaalilukujoukossa jatkuva funktio?
 - (c) Määrää alkukuvaajoukot $f^{-1}\{-1\}$, $f^{-1}\{1\}$, $f^{-1}\{0\}$.
4. Määrää vakio k siten, että raja-arvo on olemassa.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - k^2}{x - 4}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{4x + 1 + x^k}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 5}{e^{kx} + 3}$

Loppuviikko

Taulutehtävät

1. Määää seuraavien sarjojen suppenemisväliä.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{2^n n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{\sqrt{n}}$

2. Määää raja-arvot

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x}$

3. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Onko f

(a) jatkuva?

(b) derivoituva?

(c) Määää funktion derivaatta niissä pisteissä, joissa se on olemassa.

(d) Onko derivaattafunktio jatkuva?

Palautettavat tehtävät

4. Määää seuraavien funktioiden Taylorin kehitelmien neljä ensimmäistä termiä, kun kehityskeskus on a .

(a) $x \mapsto \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

(b) $x \mapsto \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

(c) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $a = 1$.

5. Funktion $f : x \mapsto \sin(x^2)$ Taylorin kehitelmä origon suhteen on

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

Määää $f'(0)$, $f'''(0)$ ja $f^{(10)}(0)$.

6. Määää seuraavien sarjojen summa

(a) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$

(b) $1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots$