viikko 1, mallit 1 (alkuviikon tehtävät)

1. (a) Tehtäväpaperissa annettujen jonojen viisi ensimmäistä termiä ovat

   i. $0, 3, 2, 5, 4, \ldots$

   ii. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

   iii. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$

   (b) Jonojen yleiset termit ovat

   i. $a_n = 2^{n+1}$, $n \geq 1$

   ii. $a_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$, $n \geq 1$

   iii. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, $n \geq 1$.

2. Palautetaan mieleen, että (reaaliarvoisella) lukujonolla $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, jos seuraava ehto toteutuu: mikäli meille on annettu mikä tahansa (mielivaltainen) luku $\varepsilon > 0$, niin on mahdollista löytää sellainen annetusta luvusta ε riippuva kynnysindeksi $k_\varepsilon > 0$, että

$$n > k_\varepsilon \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

Toisin sanoen lukujonon jäsenten a_n ja raja-arvon A etäisyys saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan n on tarpeeksi suuri.

Raja-arvon olemassaolon määrittäminen suoraan määritelmään vedoten on helppo tehtävä yksinkertaisille jonoille. Esimerkiksi väittämä $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ voidaan perustella sillä, että annettua lukua $\varepsilon > 0$ kohti valinta $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (tässä kynnys $k_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$) tuottaa $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Jos jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on kuitenkin muodostettu yhdistelemällä muita, yksinkertaisempia lukujonoja tavallisten aritmeettisten laskusääntöjen avulla (lukujonojen summa, tulo tai osamäärä), niin raja-arvo voidaan tyypillisesti määrittää käyttämällä luentomonisteessa esitettyjä yhdistelysääntöjä [Alestalo, Lause 1.3] — kunhan sääntöjä ei rikota eli komposiittilukujonon tekijät eivät hajaannu ja nollalla ei jaeta.

Tehtäville 2(a)–2(e) ja 2(g) on esitetty tämän monisteen loppuosan liitteessä harjoituksen vuoksi myös raja-arvon määritelmään perustuvat päättelyt. *Raja-arvon määritelmän soveltamiseen kannattaa tutustua jo nyt ja siihen kannattaa ehdottomasti palata myöhemmässä vaiheessa kurssia.*

(a) Jono $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Heuristiikka. Tunnetusti $\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Koska tämä jono suppenee nollaan, niin pienellä miettimisellä on ilmeistä, että ei oikeastaan ole väliä seikkaileeko merkin suhteen alternoitu jono $\frac{(-1)^n}{n}$ positiivisten vai negatiivisten lukujen puolella, sillä sen etäisyys nollasta pienenee (itseisarvomielessä) joka tapauksessa. Huomaa kuitenkin, että päättely **EI** toimi jonolle $(-1)^n a_n$, jos $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — ajattele jonoja $(1, 1, 1, \ldots)$ ja $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

Perustelu. Olkoon $n \geq 1$. Havaitaan, että

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Siis n:n kasvaessa lukujonon $\frac{(-1)^n}{n}$ itseisarvo jää "puristuksiin" nollan ja nollaa kohti suppenevan lukujonon väliin — tämän tyylinen päättely on esimerkki suppiloperiaatteen soveltamisesta [Alestalo, s. 11]. Siispä $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

(b) Jono $a_n = \frac{1}{n} + \ln n$, $n \geq 1$, hajaantuu, erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln n \right) = +\infty.$$

Heuristiikka. Pidetään tunnettuna, että logaritmi kasvaa rajatta eli $\ln n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Nyt lukujono a_n on olennaisesti muotoa (äärettömään kasvava logaritmi)+(pieni positiivinen lisäys). Positiivinen termi $\frac{1}{n}$ ei mitenkään hidasta logaritmitermin kasvua äärettömyyteen, päin vastoin, se kasvattaa logaritmitermin arvoa hiukan jokaisella $n \geq 1$ — rajalla $n \to \infty$ tämän positiivisen termin lisäys logaritmiin häviää, mutta "vahinko" on jo tapahtunut ja logaritmi vei lukujonon termit äärettömyyteen.

Perustelu. Olkoon $n \geq 1$. Nyt

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{\ln n}_{\geq 0} > \ln n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty,$$

sillä logaritmi $\ln n$ kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$. Epäyhtälö on tässä perusteltu, sillä kaikki termit ovat nyt epänegatiivisia, joten positiivisen luvun $1/n$ poistaminen epäyhtälömerkin vasemmalta puolelta pienentää lausekkeen arvoa. Siis $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln n \right) = +\infty$.

(c) Jono $a_n = 3 + \mathrm{e}^{-2n}$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} (3 + \mathrm{e}^{-2n}) = 3.$$

Heuristiikka. Eksponentoitu (positiivinen) termi e^n kasvaa rajatta, kun n kasvaa rajatta. Kääntäen, eksponenttifunktio $e^{-n} = 1/e^n$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa rajatta. Argumentin skaalaaminen luvulla 2 vain kiihdyttää tätä suppenemista, joten annettu lukujono $a_n = 3 + e^{-2n}$, $n \geq 1$, on olennaisesti muotoa (vakio)+(nollaa kohti menevä termi). Vakiotermiä perturboivan eksponenttitermin vaikutus vähenee äärimmäisen nopeasti, kun n kasvaa — rajalla $n \to \infty$ lukujono on supennut (eksponentiaalista vauhtia) vakioon 3.

Perustelu. Mikäli pidämme tunnettuna, että $e^{-2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (tämän perustelu löytyy monisteen loppuosan liitteestä), niin on helppo todeta, että lukujonon $a_n = 3 + e^{-2n}$, $n \geq 1$, summantekijäjonot suppenevat erikseen raja-arvoihin $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$ ja $\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0$. Täten luentomonisteen [Alestalo, Lause 1.3] nojalla summajono suppenee kohti näiden yksittäisten raja-arvojen summaa

$$\lim_{n\to\infty}(3 + e^{-2n}) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 3 + 0 = 3.$$

(d) Jono $a_n = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0.$$

Perustelu. Olkoon $-1 < x < 1$. Kertomalla tätä lukua itsensä kanssa, muodostetaan geometrinen jono $(x^n)_{n=1}^{\infty}$, jonka jäsenet lähenevät kohti nollaa, kun potenssi n kasvaa rajatta (kts. [Alestalo, s. 11]; lue myös monisteen loppuosassa oleva liite, jos haluat saada aavistuksen, miksi näin käy!). Koska $-1 < \frac{2}{3} < 1$, niin tämän nojalla $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(e) Jono $a_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Heuristiikka. Olemme jo aiemmin todenneet, että $\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Tunnetusti $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli sinitermi skaalaa termiä $\frac{1}{n}$ siten, että $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Koska jono $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ oskilloi kahden nollaa kohti menevän lukujonon välillä, "puristuu" tehtävänannon jono kohti nollaa, kun n kasvaa rajatta [Alestalo, suppiloperiaate s. 11].

Perustelu. Koska $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, voidaan tämä epäyhtälöketju ilmaista yksinkertaisemmin itseisarvon avulla muodossa $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti siis

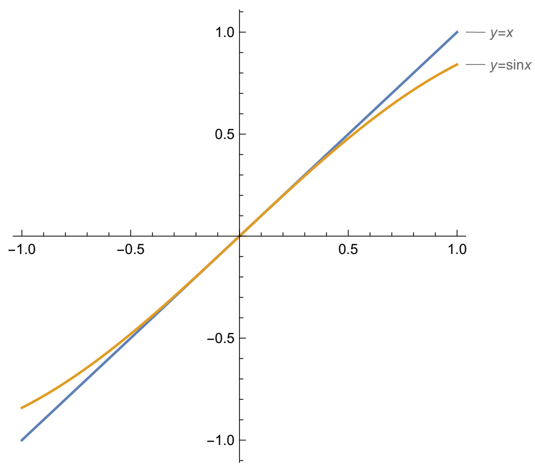
$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = |\sin n| \left|\frac{1}{n}\right| \overset{\substack{|\sin n| \leq 1 \\ \text{kaikilla } n \geq 1}}{\leq} \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Lukujono $\frac{\sin n}{n}$ jää siis puristuksiin nollan ja nollaa kohti suppenevan lukujonon $\frac{1}{n}$ väliin, joten suppiloperiaatteen [Alestalo, s. 11] nojalla $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(f) Jono $a_n = n \sin \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1.$$

Heuristiikka. Koska kyseessä on nyt (hieman epätriviaali) kahden jonon tulo, jossa toinen tulontekijä kasvaa rajatta ja toinen lähestyy nollaa, ei välttämättä ole itsestään selvää, mihin jono suppenee (vai suppeneeko ollenkaan). Kvalitatiivisesti kuitenkin on totta, että "origon ympäristössä sini käyttäytyy kuten $\sin x \approx x$" (tämän tarkempi muotoilu käsitellään Perustelussa 2). Tämän perusteella voisi ajatella, että n:n kasvaessa $\sin \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ ja siten rajalla $n \to \infty$ tulontekijäjonot kumoavat toisensa ja raja-arvoksi saadaan 1.



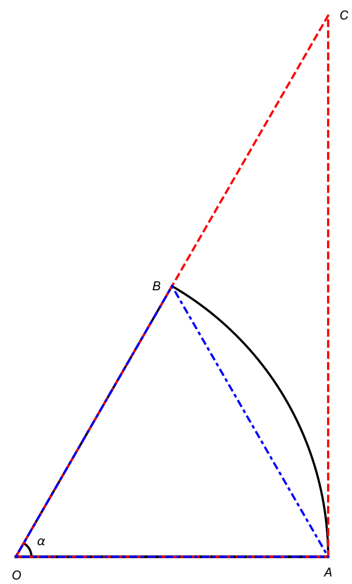
Kuva 1: Origon ympäristössä $y = \sin x$ ja $y = x$ käyttäytyvät hyvin samalla tavalla; itse asiassa nämä eroavat toisistaan vain kertaluokkaa x^3 olevalla termillä (kts. Perustelu 2), joka on äärimmäisen pieni origon ympäristössä.

Perustelu 1 (geometrinen päättely). Kun $n \geq 1$, niin $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Olemme siis kiinnostuneet (kannattaa ajatella muuttujanvaihtoa $\alpha = \frac{1}{n} \in (0, 1]$) termin

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \text{ (radiaaneina)},$$

käyttäytymisestä origon ympäristössä.

Havainnekuvasta 2 voidaan päätellä, että



Kuva 2: Tehtävä 2 (f): Yksikkösäteinen sektori OAB, tämän sisältämä kolmio OAB sekä molemmat sisältävä suorakulmainen kolmio OAC.

$$(\text{Kolmion} \lhd (\text{OAB}) \text{ ala}) \le (\text{Sektorin} \lhd (\text{OAB}) \text{ ala}) \le (\text{Kolmion} \lhd (\text{OAC}) \text{ ala}),$$

kun $0 < \alpha < \pi/2$ (radiaaneina). Alueiden lausekkeet ovat yksikkösektorin tapauksessa

$$\begin{aligned}
(\text{Kolmion} \lhd (\text{OAB}) \text{ ala}) &= \frac{\sin\alpha}{2}, && (\text{SAS-kolmio } A_{\lhd(\text{OAB})} = \tfrac{|OA|\cdot|OB|\sin\alpha}{2} = \tfrac{1\cdot\sin\alpha}{2})\\
(\text{Sektorin} \lhd (\text{OAB}) \text{ ala}) &= \frac{\alpha}{2}, && (A_{\lhd(\text{OAB})} = \pi r^2 \cdot \tfrac{\alpha}{2\pi}\big|_{r=1})\\
(\text{Kolmion} \lhd (\text{OAC}) \text{ ala}) &= \frac{\tan\alpha}{2}, && (\tan\alpha = \tfrac{|AC|}{|OA|}, A_{\lhd(\text{OAC})} = \tfrac{|AC|\cdot|OA|}{2}, |OA| = 1)
\end{aligned}$$

joten saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{2} \le \frac{\alpha}{2} &\le \frac{\tan\alpha}{2}, && (\text{kertominen termillä } \frac{2}{\sin\alpha})\\
1 \le \frac{\alpha}{\sin\alpha} &\le \frac{1}{\cos\alpha}, && (0 < a \le b \Leftrightarrow 0 < \tfrac{1}{b} \le \tfrac{1}{a})\\
\cos\alpha \le \frac{\sin\alpha}{\alpha} &\le 1.
\end{aligned}$$

Erityisesti siis takaisinsijoitus $\alpha = \frac{1}{n}$ ylläolevaan tuottaa

$$\cos\frac{1}{n} \leq n\sin\frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{kaikilla } n \geq 1.$$

Antamalla $n \to \infty$ alarajalle pätee $\cos\frac{1}{n} \to \cos(0) = 1$.† Nyt termi $n\sin\frac{1}{n}$ on rajoitettu ylhäältä päin vakiolla 1, ja sen alaraja työntää sitä lähemmäs ylärajaa kun n kasvaa rajatta. Suppiloperiaatteen [Alestalo, s. 11] nojalla raja-arvo siis "puristuu" arvoon

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$$

Perustelu 2 (sinin polynomikehitelmä). Käytetään hyväksi tietoa, että origon ympäristössä sini käyttäytyy kuten identtinen kuvaus, tarkalleen ottaen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = x + \mathcal{O}(x^3), \quad \text{kun } |x| \ll 1,$$

jossa Landaun iso-O notaatio $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ on nollan ympäristössä määritelty (hieman yksinkertaistaen)

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ jollain vakiolla } C > 0, \quad \text{kun } |x| \ll 1.$$

Toisin sanoen, "kun x on riittävän lähellä origoa, niin $\sin x \approx x$ (lukuunottamatta kertaluokkaa x^3 olevaa termiä)" Käyttämällä hyväksi tätä kehitelmää, pätee

$$n\sin\frac{1}{n} = n\left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

kunhan $n \gg 1$. Kun n kasvaa rajatta, niin termi $1/n^2$ lähestyy nollaa ja siten $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$. Lukujonon suppenemisnopeus on yllä olevan perusteella kääntäen verrannollista indeksin n neliöön — melkoisen nopeaa siis.

Huomio. Alkeisfunktioille $\sin, \cos, \tan, \exp, \sinh, \cosh, \tanh$, näiden käänteisfunktioille ja niitä yhdistelemällä saaduille funktioille on käytännössä katsoen aina olemassa jokin polynomiapproksimaatio *minkä tahansa määrittelyalueen sisäpisteen ympäristössä*. Tämä johtuu siitä, että alkeisfunktiot ovat äärimmäisen sileitä — ja funktion sileys säilyy hyvin tavallisissa funktioiden yhdistelyoperaatioissa (mahdolliset nollalla jakamiset poislukien). Tähän palataan myöhemmin kurssilla sarjateorian ja Taylor-kehitelmien yhteydessä,

†Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Nyt seuraava pätee: jos $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, niin myös $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$ [Alestalo, s. 48]. Tulos pätee myös toiseen suuntaan: jos jonon $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo yhtenee funktion f arvoon $f(A)$ kaikilla suppenevilla lukujonoilla $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A \in \mathbb{R}$, niin funktio f on jatkuva!

mutta polynomikehitelmät on syytä pitää mielessä sillä ne ovat äärimmäisen kätevä tapa tutkia mm. funktioiden raja-arvoja paikallisesti.

Perustelu 3 (l'Hospitalin sääntö). Mikäli derivointi ja l'Hospitalin sääntö ovat tuttuja, voidaan kirjoittaa

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin x}{x},$$

missä on sovellettu muuttujanvaihtoa $x = \frac{1}{n}$. Tarkastellaan siis ylläolevan lausekkeen käytöstä, kun $x \to 0$. Nyt l'Hospitalin säännön (helppo) muotoilu sanoo, että jos derivoituville funktioille f ja g pätee $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, niin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli jälkimmäinen raja-arvo on olemassa. Koska nyt sinin jatkuvuuden nojalla $\sin x \overset{x \to 0}{\to} \sin(0) = 0$ ja $x \overset{x \to 0}{\to} 0$, niin l'Hospitalin säännön perusteella

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x} = \frac{\cos x}{1} = \cos x = \cos \frac{1}{n} \overset{n \to \infty}{\to} \cos(0) = 1,$$

jossa viimeisestä välivaiheesta saatavan raja-arvon olemassaolo ja arvo seuraavat kosinin jatkuvuudesta (ja arvosta) origossa (kts. edellisen sivun alareunassa oleva kommentti).

(g) Jono $a_n = \cos(\pi n)$, $n \geq 1$, hajaantuu.

Perustelu. Parillisilla arvoilla $n = 2k$, $k \geq 1$, pätee $\cos(2\pi k) = 1$ ja parittomilla arvoilla $n = 2k - 1$, $k \geq 1$, pätee $\cos((2k-1)\pi) = -1$. Kyseessä on siis jono $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, joka tunnetusti hajaantuu.

(h) Jono $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \frac{1}{2}.$$

Perustelu. Kahden neliöjuurimuotoisen jonon erotuksen raja-arvon määrittämiseen on olemassa helppo temppu. Palautetaan mieleen vanha tuttu kaava $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Jos $x \neq -y$, niin tästä seuraa

$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}.$$

Olkoon $n \geq 1$. Sijoittamalla yllä olevaan kaavaan $x = \sqrt{n^2 + n}$ ja $y = \sqrt{n^2 - 1}$

saadaan

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1} &= \frac{n^2+n-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} \quad (n \\
&= \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \\
&\overset{n\to\infty}{\to} \frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Päättely on perusteltu, sillä sekä osoittajassa että nimittäjässä olevat jonot suppenevat äärellisiin arvoihin ja nimittäjässä oleva jono suppenee nollasta poikkeavaan arvoon [Alestalo, Lause 1.3]. Siis $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}) = \frac{1}{2}$.

3. Merkitään auton ostohintaa a ja olkoon a_n auton arvo n:ntenä vuonna ostohetkestä. Auton arvonlasku tarkoittaa ostohinnan ja sen myyntihinnan erotusta; merkitään arvonlaskua vuonna n ostohetkestä $d_n(a) = a - a_n$. Ostohetkellä luonnollisesti $d_0(a) = 0$.

Vuoden kulutua auton arvo on

$$a_1 = 0{,}88a$$

ja auton arvonlasku on

$$d_1(a) = a - a_1 = (1-0{,}88)a = d_0(a) + (1-0{,}88)a.$$

Kahden vuoden kuluttua auton arvo on

$$a_2 = 0{,}88a_1 = 0{,}88^2a$$

ja sen arvonlasku on

$$d_2(a) = a - a_2 = (1-0{,}88^2)a.$$

Tämä voidaan palauttaa edellisen vuoden arvonlaskuun $d_1(a)$ havaitsemalla, että

$$\begin{aligned}
d_2(a) = (1-0{,}88^2)a = (1-0{,}88+0{,}88-0{,}88^2)a &= (1-0{,}88)a + (0{,}88-0{,}88^2)a \\
&= d_1(a) + (0{,}88-0{,}88^2)a.
\end{aligned}$$

Kolmantena vuonna auton arvo on

$$a_3 = 0{,}88a_2 = 0{,}88^3a$$

ja sen arvonlasku on

$$d_3(a) = a - a_3 = a - 0{,}88^3 a = (1 - 0{,}88^3)a.$$

Tämä voidaan jälleen palauttaa toisen vuoden arvonlaskuun $d_2(a)$ kirjoittamalla

$$\begin{aligned} d_3(a) = (1 - 0{,}88^3)a = (1 - 0{,}88^2 + 0{,}88^2 - 0{,}88^3)a = (1 - 0{,}88^2)a + (0{,}88^2 - 0{,}88^3)a \\ = d_2(a) + (0{,}88^2 - 0{,}88^3)a. \end{aligned}$$

Siten auton arvo toteuttaa (rekursiivisen) palautuskaavan

$$a_0 = a \text{ ja } a_{n+1} = 0{,}88a_n,\ n \geq 0 \qquad (\text{ostohinta } a \in \mathbb{R}_+)$$

ja sen yleinen termi on

$$a_n = 0{,}88^n a,\ n \geq 0. \qquad (\text{ostohinta } a \in \mathbb{R}_+)$$

Vastaavasti auton arvonlaskulla on (rekursiivinen) palautuskaava

$$d_0(a) = 0 \text{ ja } d_{n+1}(a) = d_n(a) + (0{,}88^n - 0{,}88^{n+1})a,\ n \geq 0 \quad (\text{ostohinta } a \in \mathbb{R}_+)$$

ja sitä vastaa yleinen termi

$$d_n(a) = (1 - 0{,}88^n)a,\ n \geq 0. \qquad (\text{ostohinta } a \in \mathbb{R}_+)$$

(a) Uuden auton ostohinta on $a = 20\,000$ (euroa), joten sen arvonlaskun (rekursiivinen) palautuskaava saadaan ylläolevasta päättelystä asettamalla $d_n = d_n(20\,000)$, jolloin

$$d_0 = 0 \text{ ja } d_{n+1} = d_n + 20\,000(0{,}88^n - 0{,}88^{n+1}),\ n \geq 0,$$

ja yleinen termi

$$d_n = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}88^n),\ n \geq 0.$$

Auton arvonlasku vuosittain (ml. ostohetki) on $(d_n)_{n=0}^{\infty} = (0; 2\,400; 4\,512; 6\,370{,}56; \ldots)$.

(b) Korjauskulut uudelle autolle ovat ensimmäisenä vuonna

$$r_1 = 400.$$

Toisena vuonna korjauskulut ovat kasvaneet 18% eli korjaukseen palaa tällöin rahaa

$$r_2 = 400 \cdot 1{,}18 = 472 \text{ eli } r_2 = 1{,}18 \cdot r_1.$$

Kolmantena vuonna korjauskulut ovat

$$r_3 = 472 \cdot 1{,}18 = 556{,}96 \text{ eli } r_3 = 1{,}18 \cdot r_2.$$

Korjauskuluja kuvaavan jonon (rekursiivinen) palautuskaava on

$$r_1 = 400 \text{ ja } r_{n+1} = 1{,}18 \cdot r_n, \ \ n \geq 1$$

ja sitä vastaa yleinen termi

$$r_n = 400 \cdot 1{,}18^{n-1}, \ \ n \geq 1.$$

(c) Arvioinnissa huomioidaan uuden auton arvonlasku (eli alkuperäisen ostohinnan ja uudelleenmyyntihinnan erotus) sekä korjauskulut kolmelta vuodelta, so. (euroina)

$$d_3 + r_1 + r_2 + r_3 = 20\,000 \cdot \big(1 - 0{,}88^3\big) + 400 \cdot \big(1 + 1{,}18 + 1{,}18^2\big) = 7\,799{,}52.$$

Kolmen vuoden käytön jälkeen auton pitämisen kustannuksiksi tulee 7 799,52 euroa auton uudelleenmyynnin jälkeen.

(d) Jos auto hankitaan kaksi vuotta vanhana, sen ostohinnaksi tulee

$$a = a_2 = 20\,000 \cdot 0{,}88^2 = 15\,488.$$

Arvonlasku kolmantena vuonna on nyt $d_3(15\,488)$ ja korjauskulut vanhalle autolle lasketaan kolmannesta vuodesta eteenpäin, so. $r_3 + r_4 + r_5$, joten kustannuksiksi saadaan (euroina)

$$\begin{aligned} d_3(15\,488) + r_3 + r_4 + r_5 = 15\,488 \cdot \big(1 - 0{,}88^3\big) + 400 \cdot \big(1{,}18^2 + 1{,}18^3 + 1{,}18^4\big) \\ \approx 6\,923{,}05. \end{aligned}$$

Kaksi vuotta vanhan auton pitämisen kustannuksiksi tulee 6 923,05 euroa kolmen vuoden ajalta auton uudelleenmyynnin jälkeen. Vanhan auton ostaminen on siis edullisempi vaihtoehto.

Liite: raja-arvon määritelmä

Perustelu 2(a). Raja-arvo voidaan myös määrittää vetoamalla suoraan raja-arvon määritelmään. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen.† Tarkastelemalla lauseketta $|\frac{(-1)^n}{n} - 0|$ havaitaan, että

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \quad \text{kaikilla } n \geq 1. \tag{1}$$

†Raja-arvon määritelmässä on olennaista, että luku $\varepsilon > 0$ todellakin on mielivaltainen — tähän emme saa koskea. Lukujonon raja-arvon määritelmässä on kuitenkin pelivaraa kynnysindeksin $k_\varepsilon > 0$ suhteen: tämän arvon me saamme valita (ja meidän pitääkin kyetä valitsemaan) niin suureksi, että $|(-1)^n/n - 0| < \varepsilon$ pätee aina, kun kriteeri $n > k_\varepsilon$ on voimassa.

Valitsemalla kynnysindeksiksi $k_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ on ilmeistä, että kriteeristä $n > k_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ seuraa $\varepsilon > \frac{1}{n}$, joten lausekkeelle (1) erityisesti pätee

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{aina, kun } n > \frac{1}{\varepsilon} = k_\varepsilon.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Perustelu 2(b). Lähestytään ongelmaa jälleen määritelmän kautta. Lukujono $a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$, jos jokaista lukua $M > 0$ kohti löytyy kynnysindeksi $k_M > 0$ siten, että $a_n > M$ aina, kun $n > k_M$. Olkoon siis $M > 0$ mielivaltainen. Kun $n \geq 1$, niin jonon alkiot ovat positiivisia ja niille pätee

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{\ln n}_{\geq 0} > \ln n.$$

Logaritmi hajaantuu, kun $n \to \infty$. Tämä voidaan todeta valitsemalla kynnysindeksiksi $k_M = \mathrm{e}^M$. Koska logaritmi ja eksponenttifunktio ovat toistensa käänteisfunktiota ja molemmat ovat aidosti kasvavia funktiota, niin vaatimalla $n > \mathrm{e}^M$ pätee

$$\frac{1}{n} + \ln n > \ln n \overset{\substack{\text{ln aidosti}\\ \text{kasvava}}}{>} \ln \mathrm{e}^M \overset{\substack{\ln \mathrm{e}^x = x\\ \text{kaikilla } x\in\mathbb{R}}}{=} M \quad \text{aina, kun } n > \mathrm{e}^M.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln n\right) = +\infty$.

Perustelu 2(c). Perustellaan väite soveltamalla lukujonon raja-arvon määritelmää. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Nähdään, että

$$\left|(3 + \mathrm{e}^{-2n}) - 3\right| = \left|\mathrm{e}^{-2n}\right| = \mathrm{e}^{-2n} \quad \text{kaikilla } n \geq 1.$$

Valitaan kynnysindeksiksi $k_\varepsilon = \ln\sqrt{1/\varepsilon}$ ja vaaditaan $n > \ln\sqrt{1/\varepsilon} = k_\varepsilon$.[†] Koska funktio $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ on aidosti vähenevä, niin pätee

$$\left|(3 + \mathrm{e}^{-2n}) - 3\right| = \mathrm{e}^{-2n} \overset{\substack{n > \ln\sqrt{1/\varepsilon}\\ e^{-2x} \text{ aid. vähenevä}\\ \Rightarrow \text{ey:n järjestys vaihtuu}}}{<} \mathrm{e}^{-2\ln\sqrt{1/\varepsilon}} = \mathrm{e}^{\ln\varepsilon} = \varepsilon$$

aina, kun $n > \ln\sqrt{1/\varepsilon}$. Siis $\lim_{n\to\infty} (3 + \mathrm{e}^{-2n}) = 3$.

Perustelu 2(d). Olkoon $\varepsilon > 0$. Tehtävänä on löytää sellainen kynnysindeksi $k_\varepsilon > 0$, että $n > k_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2^n}{3^n} - 0\right| < \varepsilon$. Havaitaan, että

$$\left|\frac{2^n}{3^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \overset{\substack{\text{ln aid.}\\ \text{kasvava}}}{\Leftrightarrow} n\ln\frac{2}{3} < \ln\varepsilon \overset{\ln(2/3)<0}{\Leftrightarrow} n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln(2/3)},$$

[†]Valinta on perusteltu, sillä $\mathrm{e}^{-2n} < \varepsilon \Leftrightarrow -2n < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > -\frac{1}{2}\ln\varepsilon = \ln\sqrt{1/\varepsilon} =: k_\varepsilon$.

joten valitsemalla $k_\varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2/3)}$ seuraa (kulkemalla yo. yhtäpitävyysketjua lopusta alkuun), että

$$\left|\frac{2^n}{3^n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2/3)} = k_\varepsilon.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Huomioi, että samanlainen päättely toimii korvaamalla luku 2/3 millä tahansa luvulla $x \in (-1, 1)$.

Perustelu 2(e). Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Jos $n \geq 1$, niin

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| |\sin n| .$$

Sinifunktiolle pätee $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Yhtäpitävästi $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja voidaan edelleen arvioida

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| |\sin n| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Päättely eteenee samoin kuin a-kohdassa eli valitsemalla $n > \frac{1}{\varepsilon}$ saadaan

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{aina, kun } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Perustelu 2(g). Tehtävä palautuu sen todistamiseen, että jono $a_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$, $n \geq 1$, hajaantuu. Tämän näyttäminen soveltaa *epäsuoraa todistusta* (reductio ad absurdum), joka perustuu seuraavaan metodologiaan:

- Halutaan osoittaa, että väite P on tosi.
- Tehdään vastaoletus: väite P on epätosi.
- Osoitetaan, että väitteestä ei-P seuraa looginen ristiriita.[†]

$\therefore$ Väitteen P on oltava tosi.

Aloitetaan siis tekemällä vastaoletus: jono $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, suppenee ja sen raja-arvo on $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Huomaa, että raja-arvo on aina yksikäsitteinen: luvulla A voi olla vain yksi mahdollinen arvo. Erityisesti voimme raja-arvon määritelmässä valita $\varepsilon = 1$, jolloin (vastaoletuksen voimassaollessa) löytyy jokin kynnys $k_\varepsilon > 0$ siten, että

$$|(-1)^n - A| < 1, \quad \text{kun } n > k_\varepsilon.$$

[†] Aritmeettisissa todistuksissa tämä yleensä johtaa esimerkiksi muotoa $1 = 0$ tai muotoa $1 < 0$ oleviin väittämiin, joita on (normaalilla järjestysrelaatiolla varustetuissa lukujoukoissa) mahdoton hyväksyä — ne muodostavat siis ristiriidan oletuksen, aksiooman tai muun aiemmin todistetun tuloksen kanssa.

Jos n on jokin luku, joka toteuttaa $n > k_\varepsilon$, voidaan edelleen valita $n' = 2n$, jolle pätee $n' > n > k_\varepsilon$ ja erityisesti

$$|(-1)^{2n} - A| < 1 \Leftrightarrow |1 - A| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - A < 1 \Leftrightarrow -2 < -A < 0.$$

Toisaalta valitsemalla $n'' = 2n + 1$ pätee $n'' > n > k_\varepsilon$, joten

$$|(-1)^{2n+1} - A| < 1 \Leftrightarrow |-1 - A| < 1 \Leftrightarrow -1 < -1 - A < 1 \Leftrightarrow 0 < -A < 2.$$

Erityisesti $n'' > n' > k_\varepsilon$, joten molemmat yllä olevat väitteet ovat voimassa samanaikaisesti eli $-2 < -A < 0 < -A < 2$. Tämä on kuitenkin ristiriita: luku $-A$ ei voi olla yhtä aikaa sekä positiivinen että negatiivinen! (Huomioi, että arvo 0 on poissuljettu!) Siispä vastaoletuksemme jonon suppenemisesta on väärin, joten jono $a_n = (-1)^n = \cos(n\pi)$, $n \geq 1$, hajaantuu.

Kurssimateriaali

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.* Aalto-yliopisto, luentokalvot, 2016.
https://mycourses.aalto.fi/mod/resource/view.php?id=135608

4. (a) $(f_n)_{n=1}^{12} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144)$.

(b) Pidetään tunnettuna, että Fibonaccin jonon $f_1 = f_2 = 1$ ja $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 2$, kahden peräkkäisen termin osamäärän raja-arvo suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = r \in (0, \infty). \tag{1}$$

Halutaan osoittaa, että tämä raja-arvo toteuttaa toisen asteen yhtälön $r^2 = r + 1$.

Tehtävässä kannattaa lähteä liikkeelle sijoittamalla haetun yhtälön $r^2 = r + 1$ vasemmanpuoliseen lausekkeeseen luvun r määritelmä ja pyrkiä sieventämään tämä muotoon $r + 1$. Voimme lisäksi olettaa, että $n \geq 2$, jolloin voimme soveltaa Fibonaccin jonon rekursiota $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ — olemmehan kiinnostuneita vain lukujonon "häntäpään" käytöksestä! Siispä

$$r^2 = r \cdot r \overset{(1)}{=} r \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \right) \overset{f_{n+1}=f_n+f_{n-1}}{=} r \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} \right) = r \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \right).$$

Selvästikin jono $(1)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua 1. Toisaalta koska oletimme, että $f_n/f_{n-1} \overset{n\to\infty}{\to} r > 0$,[†] niin tämän jonon alkioiden käänteisluvuista muodostetulle jonolle $f_{n-1}/f_n \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{r}$ [Alestalo, Lause 1.3, kohta 4]. Koska nämä summantekijäjonot suppenevat, niin tästä seuraa [Alestalo, Lause 1.3, kohta 1]

$$r^2 = r \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \right) = r \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} \right) = r \left(1 + \frac{1}{r} \right) = r + 1,$$

mikä oli haluttu lopputulos.

Saadusta toisen asteen yhtälöstä on helppo ratkaista r:n arvo:

$$r^2 = r + 1 \Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

[†] Huomioithan, että raja-arvolle pätee $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \lim_{n\to\infty} f_n/f_{n-1}$. Yleisemmin $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k}$ millä tahansa kiinteällä luvulla $k \geq 0$ — voimme aina jättää lukujonon alkupäästä pois äärellisen määrän alkioita (tai tuoda jonon alkuun äärellisen määrän lisää alkioita), sillä raja-arvoa koskevat väitteet on asetettu lukujonon "häntäpään" alkioille!

Koska oletimme, että $r > 0$, niin hylkäämme miinusmerkin ja saamme r:n arvoksi

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tämä luku on *kultaisen leikkauksen suhdeluku* ja sitä merkitään tyypillisesti kreikkalaisella kirjaimella fii, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$.

(c) Oletetaan nyt, että pätee $r^2 = r + 1$ (toisin sanoen, $r = \varphi$ tai $r = 1 - \varphi$; mieti, miksi jälkimmäinen arvo on nyt sallittu!). Määritellään jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ alkiot asettamalla

$$a_n = Ar^n \quad \text{jollain vakiolla } A \in \mathbb{R}.$$

Osoitettava, että näin määritelty jono toteuttaa rekursiokaavan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n > 2$.

Olkoon $n > 2$. Saadaan

$$a_{n-1} + a_{n-2} = Ar^{n-1} + Ar^{n-2} \overset{\substack{\text{yhteinen} \\ \text{tekijä } Ar^{n-2}}}{=} Ar^{n-2}(r+1) \overset{\substack{\text{oletus} \\ r+1=r^2}}{=} Ar^{n-2} \cdot r^2 = Ar^n = a_n,$$

mikä oli haluttu lopputulos.

(d) Oletetaan tunnetuksi Binet'n kaava, joka antaa eksplisiittisen lausekkeen Fibonaccin jonon n:nnelle termille:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}.$$

Jälkimmäisessä lausekkeessa mutkikkaat termit on nyt ilmaistu kultaisen leikkauksen suhdeluvun $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ avulla. Tavoitteena on osoittaa, että b-kohdan oletus oli perusteltu eli että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = r \in (0, \infty).$$

Lähdetään tutkimaan peräkkäisten termien osamäärää:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\dfrac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\cancel{\sqrt{5}}}}{\dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\cancel{\sqrt{5}}}} \overset{(\varphi^n}{=} \frac{\dfrac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} - \dfrac{(1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n}}{\dfrac{\varphi^n}{\varphi^n} - \dfrac{(1-\varphi)^n}{\varphi^n}} = \frac{\varphi - (1-\varphi)\left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\phi} - 1\right)^n}.$$

Koska luku $\frac{1}{\varphi} - 1 = \varphi - 2 \in (-1, 0)$, niin raja-arvon laskusääntöjen perusteella geometriselle jonolle $(\frac{1}{\varphi} - 1)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ [Alestalo, s. 11]. Siispä

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\varphi - (1-\varphi)\left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\phi} - 1\right)^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\varphi - (1-\varphi)\cdot 0}{1 - 0} = \varphi \quad \left(\text{eli } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$