5. (a) $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n^2$, kun $n \geq 2$.
(b) $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n$, kun $n \geq 2$.
(c) Havaitaan, että sekä osoittajassa että nimittäjässä esiintyy Fibonaccin jono — mutta nimittäjässä esiintyvä Fibonaccin jono on aina yhden termin osoittajaa jäljessä. Toisin sanoen jonon yleinen kaava on

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \ n \geq 1.$$

Havaitsemalla, että

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ kun } n \geq 2,$$

saadaan jonolle rekursiivinen palautuskaava

$$a_1 = 1 \text{ ja } a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ kun } n \geq 2.$$

Kurssimateriaali

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.* Aalto-yliopisto, luentokalvot, 2016.
https://mycourses.aalto.fi/mod/resource/view.php?id=135608

1. (a) $a_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Jono on monotonisesti kasvava ja sen raja-arvo on nolla.

(b) $a_n = n$, $n \geq 1$. Jono on monotonisesti kasvava, mutta sen kasvu on rajoittamatonta eli $a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Kaikki monotonisesti kasvavat (vast. vähenevät) ja ylhäältä (vast. alhaalta) rajoitetut jonot puolestaan *ovat* suppenevia, joten monotoniset jonot jotka eivät suppene kasvavat tai vähenevät rajoittamattomasti!

(c) Ainoat *suppenevat* geometrinet sarjat[†], joissa esiintyy toistuvia termejä, ovat (kerroinvakiota vaille) muotoa

$$\sum_{n=k}^{\infty} 0^n, \quad k \geq 0.$$

Huomaa, että tapauksessa $k = 0$ on tehtävä **sopimus** $0^0 := 1$, jotta geometrinen summakaava $\frac{1}{1-a}$ olisi voimassa myös geometrisen sarjan kantaluvun arvolle $a = 0$ (ja kyseessä on nimenomaan sopimus, joka koskee tässä yhteydessä vain ja ainoastaan geometrisia sarjoja, sillä laskutoimitusta 0^0 ei ole yleisesti määritelty; huomaa, että tässäkin tapauksessa sarjan häntäpään on oltava nolla!). Ei ole olemassa muita *suppenevia* geometrisia sarjoja, joissa esiintyy toistoja.

Myös geometrisessa sarjassa $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ esiintyy toistuvia termejä, mutta tämä **ei** ole suppeneva.

(d) Tehtävänannon toteuttavat esimerkiksi kahden ja kolmen termin geometriset summat

$$\sum_{n=0}^{1} 9^n = 10 \text{ ja } \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{\sqrt{37}-1}{2}\right)^n = 10.$$

Yleiselle k termin geometriselle summalle sopiva kantaluku a (kun indeksöinti alkaa nollasta) voidaan ratkaista yhtälöstä $\frac{1-a^{k+1}}{1-a} = 10$. Huomaa, että jos $k > 2$, niin sopivan a:n arvon löytäminen menee mutkikkaaksi (erityisesti mikäli $k > 4$, niin sopivalle a:n arvolle ei edes ole kaavaa suljetussa muodossa — sen arvo on suurilla k ratkaistava *numeerisesti*). Rajalla $k \to \infty$ tehtävä kuitenkin yksinkertaistuu, kuten nähdään seuraavassa kohdassa.

[†]Huomaa, että *sarja* viittaa aina osasummien raja-arvoon; summa on aina äärellinen.

(e) Tehtävänä on etsiä luku $a \in (-1,1)$, joka toteuttaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} = 10.$$

Jälkimmäisen yhtälön ratkaiseminen tuottaa

$$\frac{1}{1-a} = 10 \Leftrightarrow 1 = 10(1-a) \Leftrightarrow 1 = 10 - 10a \Leftrightarrow a = \frac{9}{10}.$$

Löydetty luku toteuttaa $a \in (-1,1)$, joten löydettiin suppeneva geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 10.$$

2. (a) Määritellään jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, jossa $S_1 = 1\,000$ on alkupääoma ja S_n on tilin saldo (euroina) välittömästi n:nnen talletuskerran jälkeen. Jono toteuttaa tehtävänannon perusteella rekursion $S_1 = 1\,000$ ja $S_{n+1} = 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_n$, $n \geq 1$, ja laskemalla ensimmäiset jonon alkiot auki saadaan

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\,000,\\
S_2 &= 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_1 = 1\,000 + 1{,}05 \cdot 1\,000,\\
S_3 &= 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_2 = 1\,000 + 1{,}05 \cdot 1\,000 + 1{,}05^2 \cdot 1\,000,\\
S_4 &= 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_3 = 1\,000 + 1{,}05 \cdot 1\,000 + 1{,}05^2 \cdot 1\,000 + 1{,}05^3 \cdot 1\,000.
\end{aligned}$$

Koska jonon alkiot S_1, S_2, S_3 ja S_4 ovat geometrisia summia, niin tästä voi päätellä†, että n:nnen talletuskerran jälkeen termi S_n on geometrinen summa

$$S_n = 1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k = 1\,000 \cdot \frac{1 - 1{,}05^n}{1 - 1{,}05}, \quad n \geq 1.$$

i. Tilin saldo (euroina) 11. talletuskerran jälkeen on (pyöristettynä sentin tarkkuudelle)

$$S_{11} = 1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{10} 1{,}05^k = 1\,000 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{11}}{1 - 1{,}05} \approx 14\,206{,}79.$$

†Lisätieto: Koska uusi pääoma saadaan aina rekursiivisesti edellisestä kaavalla $S_{n+1} = 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_n$, niin vaikuttaa ilmeiseltä, että myös yleiselle n pätee arvoille S_1, S_2, S_3 ja S_4 todettu geometrinen "trendi". Tarkkasilmäinen lukija saattaa kuitenkin huomata, että yleisen kaavan S_n johtamisessa käytetty intuitio ei ollut (ainakaan eksplisiittisesti) deduktiivinen päättely (yksittäisistä esimerkeistä ei voi päätellä yleistä totuutta). Katso monisteen lopussa olevasta liitteestä, miksi yleinen kaava on kuitenkin matemaattisesti perusteltavissa *matemaattisella induktiolla*!

Jos tarkkoja ollaan, tämä tulos on itse asiassa väärin, koska pankki suorittaa tilillä olevalle saldolle pyöristyksen täysiin sentteihin joka vuosi koron hyvityksen yhteydessä. Ottamalla normaalit pyöristyssäännöt huomioon saadaan korjatuksi arvoksi itse asiassa 14 206,80 euroa — mutta tämä ei ole laskettavissa geometrisen summan avulla.

ii. Kun talletuskerrat (ja vuodet) etenevät, niin tilin saldo eli jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ alkioiden raja-arvo voidaan ilmaista geometrisena sarjana

$$1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 1{,}05^k.$$

Sarja ei selvästikään suppene sillä geometrisen sarjan kantaluvulle $1{,}05 > 1$, joten

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

(b) Määritellään jono $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, jossa S_n on n:ntenä päivänä Tuusulanjärvessä olevan jätteen määrä (tonneina) puhdistamisen jälkeen. Merkitään Tuusulanjärvessä valmiiksi puhdistettavaksi soveltuvan jätteen määrää S ennen uuden jätteen pumppaamisen aloittamista ja oletetaan, että järvessä ei ole puhdistettavaksi kelpaamatonta jätettä.† Kun päivä $n = 1$ vastaa ensimmäistä päivää, jolloin järveen aletaan pumpata uutta jätettä ja puhdistusmenetelmä poistaa joka päivä 25% järvessä olevan jätteen kokonaismäärästä, niin jätteen määrää Tuusulanjärvessä kuvaa rekursio $S_0 = S$ ja $S_{n+1} = 0{,}75 \cdot (S_n + 8)$, $n \geq 0$. Laskemalla auki tämän jonon ensimmäiset jäsenet, saadaan

$$\begin{aligned}
S_0 &= S,\\
S_1 &= 0{,}75 \cdot (S_0 + 8) = 0{,}75 \cdot S + 0{,}75 \cdot 8,\\
S_2 &= 0{,}75 \cdot (S_1 + 8) = 0{,}75^2 \cdot S + (0{,}75 \cdot 8 + 0{,}75^2 \cdot 8),\\
S_3 &= 0{,}75 \cdot (S_2 + 8) = 0{,}75^3 \cdot S + (0{,}75 \cdot 8 + 0{,}75^2 \cdot 8 + 0{,}75^3 \cdot 8),\\
S_4 &= 0{,}75 \cdot (S_3 + 8) = 0{,}75^4 \cdot S + (0{,}75 \cdot 8 + 0{,}75^2 \cdot 8 + 0{,}75^3 \cdot 8 + 0{,}75^4 \cdot 8).
\end{aligned}$$

Siis n:ntenä päivänä puhdistamisen jälkeen saadaan jätteen määrälle esitys geometrisena summana (kts. monisteen loppuosan liitteestä, miksi tämä yleistys on matemaattisesti perusteltavissa!)

$$S_n = 0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}75^k = 0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \frac{0{,}75 - 0{,}75^{n+1}}{1 - 0{,}75}, \quad n \geq 1.$$

†Mikäli puhdistettavaksi kelpaamatonta jätettä olisi, voisi sen määrän lisätä suoraan pitkän aikavälin jätemäärän arvioon — oletettiinhan, että puhdistusmenetelmät poistavat 25% *puhdistettavaksi soveltuvan jätteen* kokonaismäärästä.

Pitkän aikavälin arvio saadaan määrittämällä jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo, kun $n \to \infty$. Koska nyt $-1 < 0{,}75 < 1$, niin $0{,}75^n \cdot S \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ja osasummien raja-arvo muodostaa suppenevan geometrisen sarjan, joten

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0 + 8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0{,}75^k = 8 \cdot \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75} = 8 \cdot \frac{\frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{1}{\cancel{4}}} = 8 \cdot 3 = 24.$$

Siis ennen pitkää Tuusulanjärvessä velloo 24 tonnia jätettä.