3. (a) Hajotetaan rationaalinen termi $\frac{1}{n(n+2)}$ osamurroiksi. Osamurtohajotelman voi löytää esimerkiksi *määräämättömien kertoimien menetelmällä*: olkoot $A \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathbb{R}$ tuntemattomia, ja pyritään löytämään hajotelma muotoa

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

ratkaisemalla tämän yhtälön toteuttavat luvut A ja B. Kertomalla yllä olevaa yhtälöä puolittain termillä $n(n+2)$ saadaan

$$1 = A(n+2) + Bn.$$

Kootaan oikeanpuolisessa lausekkeessa yhteen vakiot ja termien n yhteiset tekijät, jolloin saadaan

$$0 \cdot n + 1 = (A+B)n + 2A.$$

Koska vaadimme, että yhtälö pätee kaikilla $n \geq 1$, etsitään sellaista ratkaisua, jossa vasemman ja oikean puolen vakiotermit ja termin n kertoimet ovat yhtäsuuret; saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = 2A, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/2, \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Havaitaan siis, että

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2},$$

mikä voidaan todeta paikkansapitäväksi laventamalla oikean puolen rationaalitermeille yhteinen nimittäjä.

Tarkastellaan seuraavaksi osasummia

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n+2}.$$

Havaitaan, että jälkimmäinen summa on (etumerkkiä vaille) sama kuin ensimmäinen summa mutta summausindeksiä on siirretty kahdella ylöspäin. Voimme kompensoida tätä siirtämällä jälkimmäisen summaussymbolin rajoja kahdella ylöspäin, jolloin

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \sum_{n=3}^{k+2} \frac{1/2}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

sillä jokaisella $k \geq 3$ summausindeksejä $3 \leq n \leq k$ vastaavat termit kumoavat toisensa (ja olemmehan toki kiinnostuneita vain siitä, mitä *suurilla* k:n arvoilla tapahtuu). Koska kaikki sarjat ovat määritelmän mukaan osasummiensa raja-arvoja ja meillä on nyt lauseke jokaiselle tutkittavana olevan sarjan osasummallle kun $k \geq 3$, niin tästä seuraa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty} 1 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - 0 - 0\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Huomaa, että ylläolevassa päättelyssä kohta $(*)$ on perusteltu sillä, että jonot $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k=3}^{\infty}$ ja $\left(\frac{1}{k+2}\right)_{k=3}^{\infty}$ suppenevat molemmat erikseen, joten näiden summana muodostettu jono suppenee kohti näiden raja-arvojen summia [Alestalo, Lause 1.3].

(b) Sarja hajaantuu. Tämä voidaan todeta esimerkiksi seuraavalla tavalla: pidetään tunnettuna, että harmoninen sarja hajaantuu eli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ [Alestalo, Esimerkki 2.7]. Koska jokaiselle $n \geq 1$ pätee $n \geq \sqrt{n} \geq 1$, niin erityisesti $n^{-1/2} \geq n^{-1} > 0$ ja sarjan osasummille saadaan

$$\sum_{n=1}^{k} n^{-1/2} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}.$$

Antamalla $k \to \infty$ saadaan minoranttiperiaatteen [Alestalo, Lause 2.15] nojalla

$$\sum_{n=1}^{k} n^{-1/2} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \overset{k\to\infty}{\to} +\infty.$$

Rajalla siis tutkittavana olevan sarjan osasummat ovat alhaalta päin rajoitettuja harmonisilla osasummilla, jotka räjähtävät k:n kasvaessa äärettömyyteen. Siispä $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} = +\infty$.

Huom! Suhdetesti tai juuritesti eivät toimi aliharmonisille sarjoille.

Liite: matemaattinen induktio

Oletetaan, että meillä on (luonnollisten lukujen avulla numeroitu) jono väittämiä $P_0, P_1, P_2, \ldots$, jotka haluamme osoittaa paikkansapitäviksi. Toisin sanoen, tavoitteena on osoittaa, että väite P_n on tosi kaikilla $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Koska 0 on määritelmän mukaan pienin luonnollinen luku (voimme toki aloittaa numeroinnin luvusta 1 tai mistä tahansa muusta luonnollisesta luvusta), ja toisaalta annettua luonnollista lukua $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ kohti voimme aina löytää (järjestyksessä seuraavan) luonnollisen luvun $n + 1 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, niin nyt näiden avulla numeroidut väittämät $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ on mahdollista järjestää siten, että

P_0 on järjestyksessä ensimmäinen väittämä,
Väittämää P_n seuraa välittömästi väittämä P_{n+1} kaikilla $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Siten, jos haluamme osoittaa väittämät P_n todeksi jokaisella $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, voimme soveltaa seuraavaa syllogismia:

- Osoitetaan aluksi, että väite P_0 on totta (alkuaskel).
- Oletetaan, että väite P_n on totta mielivaltaisella $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (induktio-oletus).
- Osoitetaan, että mikäli väite P_n on totta jollakin $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, niin myös väite P_{n+1} on totta (induktioaskel).

$\therefore$ Väite P_n on totta jokaisella $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Induktiotodistuksen idea perustuu siis siihen, että *jos* $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (eli väittämän P_{n+1} paikkansapitävyys on sidottu sitä edeltävän väittämän P_n paikkansapitävyyteen) mielivaltaisella $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja väittämät pystytään järjestämään niin, että väittämistä ensimmäinen (tässä P_0) kyetään osoittamaan todeksi, niin väitteen P_0 totuus siirtyy tapahtumaketjussa

$$P_0 \text{ (totta)} \Rightarrow P_1 \text{ (nyt totta, koska } P_0 \text{ totta)} \Rightarrow P_2 \text{ (nyt totta, koska } P_1 \text{ totta)} \Rightarrow \cdots$$

eteenpäin kattaen jokaisen väittämän P_n, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Kyseessä on siis yksinkertaisesti vain dominoefekti.

Huom! On olennaista, että väittämät tosiaan pystytään numeroimaan luonnollisilla luvuilla — meillä täytyy olla järjestyksessä ensimmäinen väittämä (tai dominopalikka), joka aloittaa "dominopalikoiden" kaatumisen ja meidän tulee olla varmoja, että dominopalikkaväittämää P_n seuraa *välittömästi* väittämä P_{n+1} (mikäli väittämien P_n ja P_{n+1} "välillä" olisi väittämä, esimerkiksi $P_{(2n+1)/2}$, niin tästä dominoefekti ei sano mitään!).

Sovelletaan matemaattista induktiota perustelemaan geometriset summakaavat tehtävien 2(a) ja 2(b) lukujonoille.

Perustelu 2(a). Olkoon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ rekursiivisesti määritelty lukujono $S_1 = 1\,000$ ja $S_{n+1} = 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_n$, $n \geq 1$. Väite on, että tällä jonolla on yleinen kaava

$$S_n = 1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

Erityisesti siis väittämän premissi on, että jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ alkiot on määritelty palautuskaavalla $S_1 = 1\,000$ ja $S_{n+1} = 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_n$, $n \geq 1$, ja varsinainen väittämä P_n on "geometrinen summakaava (1) on voimassa jonon jäsenelle S_n", kun $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Perustelu toteutetaan induktiolla luvun n suhteen.

Alkuaskel. Kun $n = 1$, niin määritelmän mukaan $S_1 = 1\,000$. Nyt selvästi

$$1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{1-1} 1{,}05^k = 1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{0} 1{,}05^k = 1\,000 = S_1,$$

joten väite pätee jonon alkiolle S_1 (erityisesti P_1 on totta).

Induktio-oletus. Oletetaan, että jollakin $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ pätee

$$S_n = 1000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k.$$

Induktioaskel. Pidetään induktio-oletus totena annetulla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja lähdetään tarkastelemaan seuraavaa lauseketta:

$$\begin{aligned} 1\,000 \cdot \sum_{k=0}^{(n+1)-1} 1{,}05^k &= 1\,000 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} 1{,}05^k\right) = 1\,000 \cdot \left(1 + 1{,}05 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k\right) \\ &= 1000 + 1{,}05 \cdot 1000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k \overset{\text{induktio-oletus}}{=} 1\,000 + 1{,}05 \cdot S_n = S_{n+1}, \end{aligned}$$

jossa viimeinen välivaihe seuraa jonon (rekursiivisesta) määritelmästä. Erityisesti $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, joten väite yleisen termin (1) paikkansapitävyydestä on induktion nojalla perusteltu kaikille $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Perustelu 2(b). Olkoon $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ rekursiivisesti määritelty lukujono $S_0 = S$ ($S \in \mathbb{R}$ vakio) ja $S_{n+1} = 0{,}75 \cdot (S_n + 8)$, $n \geq 0$. Tavoitteena on osoittaa, että jonolla on yleinen termi

$$S_n = 0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}75^k, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Perustelu toteutetaan induktiolla luvun n suhteen.

Alkuaskel. Tapauksessa $n = 1$ pätee

$$0{,}75^1 \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{1} 0{,}75^k = 0{,}75 \cdot S + 8 \cdot 0{,}75 = S_1.$$

Induktio-oletus. Oletetaan, että jollakin $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ pätee

$$S_n = 0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}75^k.$$

Induktioaskel. Pidetään induktio-oletus totena annetulla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja lähdetään tarkastelemaan seuraavaa lauseketta:

$$0{,}75^{n+1} \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} 0{,}75^k = 0{,}75 \cdot \left(0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} 0{,}75^{k-1} \right)$$
$$= 0{,}75 \cdot \left(0{,}75^n \cdot S + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}75^k + 8 \right) \overset{\text{induktio-oletus}}{=} 0{,}75 \cdot (S_n + 8) = S_{n+1},$$

jossa viimeinen välivaihe seuraa jonon (rekursiivisesta) määritelmästä. Väite yleisen termin (2) paikkansapitävyydestä on siis induktion nojalla perusteltu kaikille $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Kurssimateriaali

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.* Aalto-yliopisto, luentokalvot, 2016.
https://mycourses.aalto.fi/mod/resource/view.php?id=135608

4. (a) Määrättävä $f(25/8)$ ja $f(13/9)$. Koska

$$\frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{8},$$

niin

$$f\left(\frac{25}{8}\right) = 3 + \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 3 + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}.$$

Edelleen

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9},$$

joten

$$f\left(\frac{13}{9}\right) = 1 + \left(1 - \frac{4}{9}\right) = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}.$$

(b) Calkinin-Wilfin-Newmanin jono on määritelty

$$a_1 = 1 \text{ ja } a_n = \frac{1}{f(a_{n-1})}, \; n \geq 2.$$

Lasketaan ensimmäiset kuusi termiä:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1,\\
&f(a_1) = f(1) = 1 + (1 - 0) = 2,\\
&a_2 = \frac{1}{f(a_1)} = \frac{1}{2},\\
&f(a_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\\
&a_3 = \frac{1}{f(a_2)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,\\
&f(a_3) = f(2) = 2 + (1 - 0) = 3,\\
&a_4 = \frac{1}{f(a_3)} = \frac{1}{3},\\
&f(a_4) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},\\
&a_5 = \frac{1}{f(a_4)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$$f(a_5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$
$$a_6 = \frac{1}{f(a_5)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Siis $(a_n)_{n=1}^6 = (1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3})$.

5. (a) Kyseessä on geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - z/2} = \frac{2}{2 - z},$$

joka suppenee täsmälleen silloin, kun $|z/2| < 1$ eli $|z| < 2$.

(b) Kyseessä on geometrinen sarja

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n = \frac{2}{1 + 2z},$$

joka suppenee täsmälleen silloin, kun $|-2z| < 1$ eli $|z| < \frac{1}{2}$.

(c) Kyseessä on vakion ja geometrisen sarjan summa

$$4 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = 4 + 3 \cdot \frac{z/3}{1 - z/3} = 4 + \frac{3z}{3 - z},$$

joka suppenee täsmälleen silloin, kun $|z/3| < 1$ eli $|z| < 3$.

(d) Kyseessä on geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1 - z^2},$$

joka suppenee täsmälleen silloin, kun $|z^2| < 1$ eli $|z| < 1$.