Differentiaali ja integraalilaskenta 1
Viikko 2

Adams & Essexs, Calculus, A Complete Course (8th Edition), luvuista 93 ja 9.4.

Alkuviikko

1. a. Vertailuperiaate:

Olkoon sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ja } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ja $0 \leq a_n \leq b_n$.

Tällöin jos

A) sarja $a_n$ hajaantuu niin $b_n$ hajaantuu (minoranttiperiaate)

B) sarja $b_n$ suppenee, niin $a_n$ suppenee (majoranttiperiaate)

Meille on annettu sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

ja se hajaantuu.

Perustelu: Koska $0 < n^2 + 1 \leq n^2 + n^2$ kaikilla $n \geq 1$,

niin $\frac{1}{n^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$, joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

($\frac{1}{n}$ on harmoninen sarja, ja se hajaantuu)

Minoranttiperiaatteen nojalla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = +\infty \text{ (hajaantuu äärettömään).}$$

1b. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ suppenee.

Perustelu: Raja-arvomuotoinen suhdetesti.

Olkoon sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Lasketaan raja-arvo suhteelle

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_n}$$

Jos

A) $0 \le \rho < 1$, sarja suppenee.

B) $\rho > 1$, sarja hajaantuu äärettömään

C) $\rho = 1$, sarjan suppenee tai hajaantuu.

Tarkastellaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ suppenemista:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1} n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ suppenee.

1c. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+5n-3}$ suppenee

Perustelu: Vertailuperiaate

Koska $5n-3>0$, kun $n \geq 1$, niin

erityisesti $n^3+5n-3 \geq n^3 > 0$, kun $n \geq 1$.

Tästä seuraa $0 < \frac{1}{n^3+5n-3} \leq \frac{1}{n^3}$,

mistä taas seuraa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+5n-3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3} < +\infty$$

yliharmoniset sarjat suppenevat

Majoranttiperiaatteen nojalla voidaan päätellä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+5n-3}$ suppenevan.

2. Integraalitestiä sovelletaan tarkasteltavana olevan sarjan

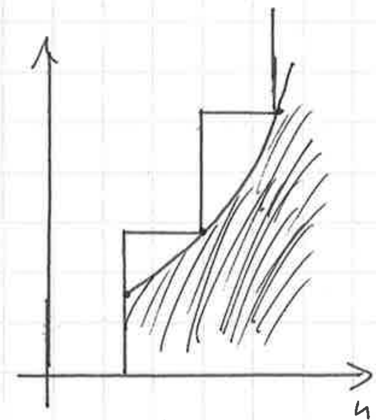
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenemisen/hajaantumisen määrittämiseen silloin, kun summandijono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on sekä i) epänegatiivinen että ii) monotonisesti vähenevä.

a. Selvästikin jono $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava ja erityisesti $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, joten tehtävänannon sarja hajaantuu ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ on välttämätön, joskaan ei riittävä, ehto minkä tahansa sarjan suppenemiselle).

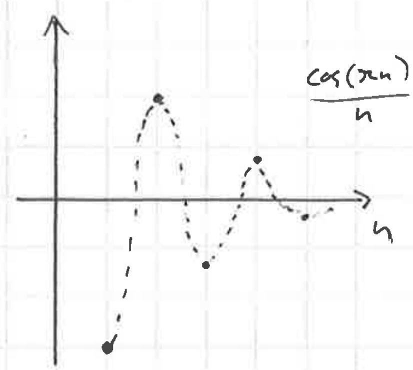
Oikealla olevasta kuvasta kuitenkin nähdään, että tässäkin tapauksessa tehtävänannon sarjalle löytyy integraalimuotoinen minorantti siten, että

$$\sum_{n=2}^{k} n^2 \geq \int_1^k x^2\,dx \xrightarrow{k\to\infty} +\infty,$$




joten annetun sarjan hajaantuminen on myös mahdollista perustella integraalitestin avulla.

b. Tehtävänannon summandijono $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ei selvästikään ole monotoninen ja sen alkiot vaihtavat merkkiä joka askeleella, joten integraalitestiä ei voi suoraan soveltaa annetulle sarjalle (integraalin pinta-alatulkinta menettää selityskelpoisuutensa heti, kun mennään x-akselin alapuolelle).




Integraalitestiä voi soveltaa sarjan itseisen suppenevuuden tutkimiseen, ts. ylärajan

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

suppenevuustarkastelussa. (Muista: jos yläraja suppenee, niin silloin myös alkuperäinen sarja suppenee; toisaalta sarja voi supeta ilman, että se on itseisesti suppeneva!) Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty, \quad \text{(harmoninen sarja)}$$

joten sarja ei suppene itseisesti. (Lisätieto: Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ on suppeneva!)

c. Kuten b-kohdassa, summandijono ei ole monotonisesti vähenevä ja sen termit vaihtavat merkkiä. Nyt kuitenkin

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sin n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-n}\sin n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

jolle integraalitesti tuottaa majorantin

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n} \leq \int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} < \infty.$$

Sarja on siis itseisesti suppeneva!

3. Vertailuperiaate, raja-arvomuotoinen

Olkoon $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ positiivisia sarjoja ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

jossa $L$ on joko positiivinen luku tai $+\infty$.

A) Jos [redacted] $L < \infty$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee.

B) Jos $L > 0$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hajaantuu äärettömään, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu myös äärettömään.

a. Verteillaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+n}{3n}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \left(\frac{3}{1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+3n}{3n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \quad e \in [0, +\infty[$$

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ on geometrinen sarja ja $-1 < \frac{1}{3} < 1$, niin sarja suppenee. Tästä seuraa, että myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n$ suppenee.

3. b. Tutkitaan, ovatko tehtävänannon sarjat vertailukelpoisia:

$$\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1+\cos\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}$$

$$= n^2\cdot\frac{1-\cos^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}$$

| trigonometrian peruslause $\sin^2 x = 1-\cos^2 x, \quad x\in\mathbb{R}$

$$= n^2\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}} = \frac{(n\sin\frac{1}{n})^2}{1+\cos\frac{1}{n}} \xrightarrow[\text{AV1, 2e}]{n\to\infty} \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}\in\,]0,\infty[\,.$$

Vertailuperiaatteen raja-arvomuodon ehto siis toteutuu. Koska nyt yliharmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

tunnetusti suppenee, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

suppenee.

Differentiaali ja integraalilaskenta 1

Viikko 2

Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition)
luvuista 9.3 ja 9.4.

Alkuviikko, Palautettavat tehtävät

---

4

a. Suhdetesti (raja-arvo muotoinen)

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

Kertoma

$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1,$

$k \in \mathbb{N}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2(n+1))! \, (n!)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{((n+1)n!)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \, (n!)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow$ sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ suppenee

b) Verrataan summandia aliharmoniseen jonoon $(n^{-1/2})_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{\frac{n-4}{\sqrt{n^3+n^2+8}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{n^{3/2}-4n^{1/2}}{\sqrt{n^3+n^2+8}} \left(n^{3/2}\right. = \frac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^3}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in ]0,\infty[.$$

Sarjat ovat siis vertailukelpoisia vertailuperiaatteen raja-arvomuodon nojalla. Koska aliharmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

hajaantuu (kts. LV1, 3b), niin nyt myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{\sqrt{n^3+n^2+8}}$$

hajaantuu.

c)

Tapa i: Integraalitestillä

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} \overset{\substack{u=\ln x \\ du = dx/x}}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

Siis tehtävänannon sarja suppenee.

Tapa ii: Sovelletaan seuraavaa menetelmää, joka tunnetaan Cauchyn kondensaatiotestinä. Olkoon $f(n) = \frac{1}{n\ln^2 n}$. Nyt $f$ on positiivinen ja aidosti vähenevä funktio, kun $n \geq 2$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} f(n) &= f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+\dots \\
&= (f(2)+f(3)) + (f(4)+f(5)+f(6)+f(7)) + \dots \\
&\overset{f \text{ aid. väh.}}{\leq} (f(2)+f(2)) + (f(4)+f(4)+f(4)+f(4)) + \dots \\
&= 2f(2)+4f(4)+8f(8)+16f(16)+\dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n).
\end{aligned}$$

Tehtävänannon sarjalle löydettiin siis eräs majorantti ja riittää osoittaa, että tämä suppenee. Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \frac{1}{\ln^2 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

sillä yliharmoninen sarja tunnetusti suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla siis sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

suppenee.