Tehtävänannon sarjalle löydettiin siis eräs majorantti ja riittää osoittaa, että tämä suppenee. Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^2} = \frac{1}{\ln^2 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

sillä yliharmoninen sarja tunnetusti suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla siis sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$$

suppenee.

5. a. $0 < n^4 + 2n^3 + 2n \leq n^4 + 2n^4 + 2n^4 = 5n^4$, kun $n \geq 1$

Tästä seuraa

$$0 < \frac{1}{5n^4} \leq \frac{1}{n^4 + 2n^3 + 2n}$$

Vertailuperiaate:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n^3+1}{n^4+2n^3+2n} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{n^3}{5n^4} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

Annetaan $k \to \infty$:

$$\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \xrightarrow{k \to \infty} +\infty$$

Minoranttiperiaatteen nojalla myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2n^3+2n} \to +\infty$$

hajaantuu.

b. Suhdetesti

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3+1}}{\frac{2^n}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{2^n((n+1)^3+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^3+1)}{n^3+3n^2+3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+\frac{1}{n^3})}{1+3\frac{n^2}{n^3}+3\frac{n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}$$

$$= 2$$

$\Rightarrow \rho = 2 > 1 \Rightarrow$ sarja hajaantuu äärettömään

c) Suhdetesti

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n-(n+1)}$$

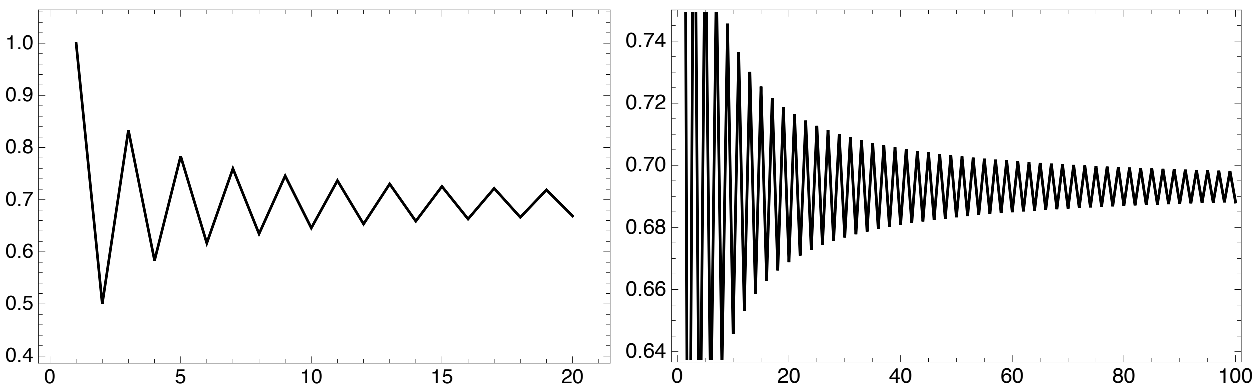
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \rho = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ sarja suppenee

Diffis 1 loppuviikon 2 tuntitehtävät

Leibnizin kriteeri

Tarkastellaan vuorottelevia sarjoja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, kun termit $a_n \geq 0$ ovat (i) monotonisesti väheneviä ja (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Kaikki Leibnizin kriteerin eli oletukset (i) ja (ii) toteuttavat vuorottelevat sarjat ovat suppenevia. Intuitiivisesti Leibnizin kriteeri voidaan ymmärtää siten, että sarjan seuraava termi kumoaa edellisen melkein kokonaan. Meillä on luku, josta vähennetään pienempi luku, johon lisätään vielä pienempi josta vähennetään vielä pienempi...



Kuva 1: Sarja suppenee Leibnizin kriteerin mukaan. Kuvattuna summien $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ arvot, kun n kasvaa. Huomataan, että sarja suppenee kohti jotain arvoa välillä $(0{,}685; 0{,}70)$ – myöhemmin kurssilla käsiteltävien Taylorin kehitelmien yhteydessä käy ilmi, että osasummat suppenevat kohti arvoa $\ln 2$.

Suppenevuudet

Itseinen suppeneminen

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Mikäli sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin tällöin myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Esimerkiksi sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ suppenee itseisesti, sillä $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana.

Ehdollinen suppeneminen

Sarja suppenee ehdollisesti, jos se suppenee muttei suppene itseisesti. Esimerkiksi sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ suppenee ehdollisesti, muttei itseisesti (vrt. harmoninen sarja).

Neperin luku

Neperin luku määritellään seuraavana raja-arvona:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Juuritesti

Juuritestillä voidaan tutkia potenssisarjojen suppenevuutta kuten suhdetestillä ja vertailuperiaatteella.

Merkitään

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Jos

- $C < 1$, niin sarja suppenee itseisesti,
- $C > 1$, niin sarja hajaantuu,
- $C = 1$, niin testillä ei voida tutkia sarjan suppenemista.

Tehtävä 1

a) Yleinen termi on

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Havaitaan, että yleinen termi on vuorotteleva. Tarkastellaan suppeneeko jono $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ monotonisesti:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$$

Termit suppenevat siis monotonisesti. Lisäksi yleisen termin raja-arvo:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Leibnizin kriteerin perusteella sarja suppenee.

b) Yleinen termi on

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Voidaan ratkaista kuten a), koska sarja on vuorotteleva.

Toinen vaihtoehto on soveltaa minoranttiperiaatetta. Aloitetaan kirjoittamalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Koska

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ja yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tunnetusti suppenee, niin myös tehtävänannon vuorotteleva sarja suppenee.

c) Tarkasteltavana on sarja

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(2\pi) + \cdots \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \cdots.\end{aligned}$$

Havaitaan, että jättämällä parillisia arvoja n vastaavat nollatermit pois sarja on mahdollista kirjoittaa muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Muunnos on perusteltu, sillä $\sin(\frac{n\pi}{2}) = 0$ kaikilla parillisilla arvoilla $n = 2k$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Jättämällä parilliset (nolla) termit pois summamerkin sisälle jäljelle jäävät vain parittomia arvoja vastaavat termit $\frac{1}{2n-1}\sin\Big(\frac{(2n-1)\pi}{2}\Big) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Tämä sarja on vuorotteleva, joten voimme tutkia sen suppenevuutta Leibnizin kriteerillä. Tutkitaan aluksi, onko jono $(|a_n|)_{n=1}^{\infty} = \big(\frac{1}{2n-1}\big)_{n=1}^{\infty}$ monotonisesti vähenevä vertailemalla peräkkäisten termien osamäärää:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$$

Jono $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ on siis monotonisesti vähenevä. Lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Leibnizin kriteerin nojalla sarja suppenee.

Tehtävä 2

a) Sarja suppenee itseisesti sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

selvästikin suppenee geometrisena sarjana.

b) Tarkastellaan aluksi, suppeneeko sarja itseisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Saatiin harmoninen sarja, joka ei suppene. Tehtävänannon sarja suppenee silti, koska se toteuttaa Leibnizin kriteerin: jono $\big(\frac{1}{n}\big)_{n=1}^{\infty}$ on monotonisesti vähenevä ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Täten sarja siis suppenee ehdollisesti.

c) Tarkastellaan yleistä termiä

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

Rajalla $n \to \infty$ havaitaan, että

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = 1 \neq 0.$$

Erityisesti siis $a_n \not\to 0$ (kts. kommentti AV1 tehtävän 2a malliratkaisussa). Koska raja-arvo ei lähesty nollaa, niin sarja hajaantuu (välttämätön ehto sarjan suppenemiselle ei toteudu).

d) Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \overset{\substack{|\cos x| \le 1 \\ \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ja yliharmoninen sarja tunnetusti suppenee, niin tehtävänannon sarja suppenee itseisesti.