

Muunnos on perusteltu, sillä $\sin(\frac{n\pi}{2}) = 0$ kaikilla parillisilla arvoilla $n = 2k$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Jättämällä parilliset (nolla) termit pois summamerkin sisälle jäljelle jäävät vain parittomia arvoja vastaavat termit $\frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Tämä sarja on vuorotteleva, joten voimme tutkia sen suppenevuutta Leibnizin kriteerillä. Tutkitaan aluksi, onko jono $(|a_n|)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n=1}^\infty$ monotonisesti vähenevä vertailemalla peräkkäisten termien osamäärää:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$$

Jono $(|a_n|)_{n=1}^\infty$ on siis monotonisesti vähenevä. Lisäksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Leibnizin kriteerin nojalla sarja suppenee.

Tehtävä 2

a) Sarja suppenee itseisesti sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

selvästikin suppenee geometrisena sarjana.

b) Tarkastellaan aluksi, suppeneeko sarja itseisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Saatiin harmoninen sarja, joka ei suppene. Tehtävänannon sarja suppenee silti, koska se toteuttaa Leibnizin kriteerin: jono $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$ on monotonisesti vähenevä ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Täten sarja siis suppenee ehdollisesti.

c) Tarkastellaan yleistä termiä

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

Rajalla $n \rightarrow \infty$ havaitaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}(1 + \frac{1}{n})} = 1 \neq 0.$$

Erityisesti siis $a_n \not\rightarrow 0$ (kts. kommentti AV1 tehtävän 2a malliratkaisussa). Koska raja-arvo ei lähesty nollaa, niin sarja hajaantuu (välttämätön ehto sarjan suppenemiselle ei toteudu).

d) Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \stackrel{\substack{|\cos x| \leq 1 \\ \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ja yliharmoninen sarja tunnetusti suppenee, niin tehtävänannon sarja suppenee itseisesti.

Tehtävä 3

Tarkastellaan suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

Lähdetään tutkimaan sarjan suppenevuutta juuritestillä:

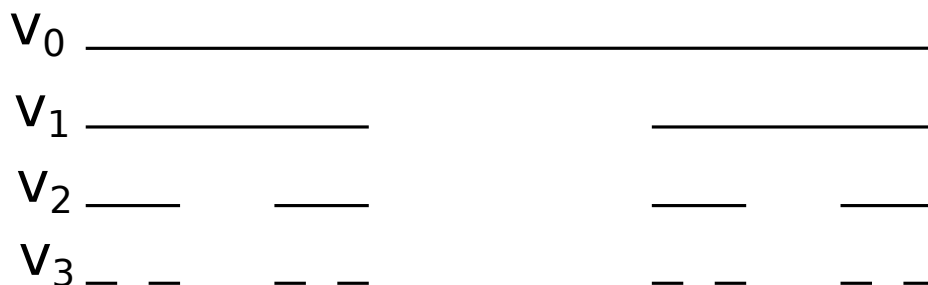
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1.$$

Juuritestin perusteella sarja suppenee itseisesti.

Diffis 1 loppuviikon 2 kotitehtävät

Tehtävä 4

a) Piirretään prosessi.



b) Poistettujen välien kokonaispituudet ovat prosessin ensimmäisissä vaiheissa

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot \frac{1}{3}, \\ v_2 &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = v_1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \\ v_3 &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = v_2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

joten yleiseksi termiksi saadaan geometrinen summa

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

c) Jos prosessia jatketaan rajattomasti, voidaan poistettujen pätkien yhteismitta laskea geometrisen sarjan summana eli raja-arvona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1 - 0 = 1.$$

Jos prosessia toistetaan rajattomasti, on poistetun osion lopullinen pituus 1. Koko väli ei kuitenkaan tule tyhjennetyksi: kun poistetut kolmannekset ovat avoimia välejä, niin poistettujen välien päätepisteet – kuten $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ – eivät ikinä kuulu poistettujen pisteiden joukkoon. Itse asiassa osoittautuu, että jäljelle jäävien pisteiden joukko on ylinumeroituva – erityisesti se on “suurempi” (mahtavampi) kuin luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ – sillä jäljelle jäävät pisteet ovat pääosin irrationaalisia.¹

¹ Aiheesta lisää syventävällä kurssilla MS-E1280 Measure and integral.

Tehtävä 5

Leibnizin kriteerin täyttävälle sarjoille (vuorotteleva sarja, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, $|a_n| > |a_{n+1}|$) pätee seuraava: olkoon $S_k = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} a_n$ alternoivan sarjan k :s osasumma ja $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Tällöin pätee

$$|S_k - S| \leq |S_k - S_{k+1}| = a_{k+1}. \quad (1)$$

Osasumma on siis 0,001 päässä sarjan arvosta, kun $|a_{k+1}| < 0,001$.

a) Lukujonon yleinen termi on muotoa

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Etsimme numeerisesti sellaisen a_n :n termin, joka on aidosti pienempi kuin 0,001. Ensimmäinen ehdon toteuttava arvo löytyy kun $n = 4$, jolloin

$$|a_4| = \frac{1}{(2 \cdot 4)!} \approx 2.5 \times 10^{-5} \text{ eli } |a_4| < 10^{-3}.$$

Tällöin yhtälön (1) perusteella

$$|S_3 - S| < 0,001.$$

b) Sarjan yleinen termi on muotoa

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Numeerisesti laskemalla havaitsemme, että lukujonon termi a_{14} toteuttaa

$$|a_{14}| = \frac{14}{2^{14}} \approx 8.5 \times 10^{-4} \text{ eli } |a_{14}| < 10^{-3}.$$

Tällöin yhtälön (1) perusteella

$$|S_{13} - S| < 0,001.$$

Bonus

Tehtävän 5 sarjojen arvot pystytään määrittämään myös käsin. Kohdan a) sarja löytyy käyttämällä kosinin sarjakehitelmää

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Tarkastelemalla tapausta $x = 1$ sarja saa muodon

$$\begin{aligned} \cos(1) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} &= \cos(1) - 1. \end{aligned}$$

Kohdan b) sarja löytyy hajoittamalla sarja osiin ja käyttämällä summakaavaa²

$$\sum_{n=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad (2)$$

²Huomaa, että tämä kaava saadaan derivoimalla geometrisen sarjan lauseketta termeittäin ja kertomalla lopuksi kaikkia termejä geometrisen sarjan kantaluvulla (tässä z).

Hajotetaan sarja osiin seuraavalla tavalla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{2^{2n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}}.$$

Käyttämällä summakaavaa (2) saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{2^{2n}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{4})^2} = \frac{16}{9}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{4})^2} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Täten alkuperäinen summa saa arvon

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} = \frac{16 - 6 - 8}{9} = \frac{2}{9}.$$