Viikko 3 alkuviikon tehtävät

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$

Tehdään suhdetesti

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x)^{n+1}}{(2x)} \cdot \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| 2x \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |2x|$$

Sarja siis suppenee kun $|2x| < 1$

ja hajaantuu kun $|2x| > 1$.

Tutkitaan vielä tapaus $|2x| = 1$

kun $2x = 1$ $\sum \frac{(2x)^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$, joka harmonisena sarjana ei suppene.

Kun $2x = -1$, sarja on $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Koska $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ja $|a_{n+1}| < |a_n|$, sarja suppenee kun $2x = -1$

Sarja siis suppenee kun $-1 \leq 2x < 1$

eli $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

2 a) $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$ $\qquad x \neq 2$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n$$

Sarja suppenee kun $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$

eli on voimassa kun $-2 < x < 2$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{(2-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n$$ | derivoidaan termeittäin

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}x$ eli suppenee

kun $-2 < x < 2$

c) $x \mapsto \ln(2-x)$ , $2-x>0$

$x<2$

$$= -\int \frac{1}{2-x}\,dx \quad , \quad = \ln(2), \text{ kun } x=0$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}x\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\ln(2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n+1} + C \quad \Big| \text{ sij } x=0$$

$$\ln(2) = C$$

siis $x \mapsto \ln(2-x) = \ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{n+1}$

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \left|\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}\right|$$

joten kun $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}$ suppenee myös

$x \mapsto \ln(2-x)$ sarjakehitelmä suppenee, eli

ainakin kun $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$

Tutkitaan $\left|\frac{1}{2}x\right| = 1$

$\frac{1}{2}x = 1$, sarja $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

eli ei suppene. kun $\frac{1}{2}x = -1$

sarja $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. $\frac{1}{n+1}$ on

vähenevä kun $n \geq 1$ ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

joten suppenee.

siis $x \longmapsto \ln(2-x) = \ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+1}}{n+1}$

kun $-2 \leq x < 2$

d) $x \longmapsto \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)}$, $2x+1 \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$

Geometrinen sarja suppenee kun $|-2x| < 1$

eli kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\quad |x| < \frac{1}{2}$

Tällöin myös sarjakehitelmä pätee.

3. $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}$$

a) $\frac{0}{0}$ ei ole määritelty, joten

f ei ole määritelty kun $x^2 - 1 = 0$ eli

$x = \pm 1$. Muualla $x \in \mathbb{R}$ f on määritelty.

Siis $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, $x \neq -1$

b) Tutkitaan voidaanko f määritellä myös pisteissä $x = 1$ ja $x = -1$. Tutkitaan raja-arvoa $\lim_{x \to 1} f(x)$. $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ kun $x^2 - 1 \geq 0$ eli kun $x^2 \geq 1$ eli $|x| \geq 1$ ja $1 - x^2$ muulloin. Siis toispuoliset raja-arvot ovat

$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{-(x^2 - 1)} = -1$$

Raja-arvoa $\lim_{x \to 1} f(x)$ ei siis ole olemassa

$\Rightarrow$ f:ää ei voida määritellä kaikille $x \in \mathbb{R}$.

3. c) f:n alkukuvajoukko on se määrittely-joukon osajoukko, jolla se saa tietyn arvon.

siis

$$f = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-1} = 1, & |x| > 1 \\ \dfrac{x^2-1}{-(x^2-1)} = -1, & |x| < 1 \end{cases}$$

joten $f^{-1}\{-1\} = \,]-1, 1[$

$f^{-1}\{1\} = \,]-\infty, -1[ \,\cup\, ]1, \infty[$

ja $f^{-1}\{0\} = \{\}$ (tyhjä joukko)

4

a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - k^2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{r}{x-4}$ , $r \in \mathbb{R}$

$= \pm \infty$ kun $r \neq 0$ (eli raja-arvoa ei ole olemassa)

Tutkitaan $r = 0$. $x^2 - k^2 = 0$ , $x = 4$

$4^2 = k^2 \Rightarrow k = \pm 4$ siis

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - k^2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-k)(x+k)}{x-4}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} x + 4 = 8$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{4x + 1 + x^k} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2})}{\cancel{x^2}(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + x^{k-2})}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{k-2}} = \lim_{x \to \infty} x^{2-k}$

$= \infty$ , $k < 2$ Raja-arvo on siis olemassa

$= 1$ , $k = 2$ kun $k \geq 2$

$= 0$ , $k > 2$

c). $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 5}{e^{kx} + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{e^{kx} + 3}$

jos $k > 0$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{e^{kx}+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

jos $k = 0$ $\lim_{x \to \infty} \frac{-5}{e^{\cancel{kx}} + 3} = \frac{-5}{1+3} = -\frac{5}{4}$

jos $k < 0$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{e^{kx}+3} = \frac{5}{\infty} = 0$

Raja-arvo on siis olemassa kaikilla $k \in \mathbb{R}$