5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-x)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n^2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{5-x}{2}\right)^n}{n^2}$ Vertaamalla geometriseen

sarjaan $q = \left(\frac{5-x}{2}\right)$ saadaan että

sarja suppenee ainakin kun $-1 < \frac{5-x}{2} < 1$

$\Leftrightarrow -2 < 5-x < 2$

$\Leftrightarrow 3 < x < 7$

Tutkitaan vielä $x = 3$ eli $q = 1$

ja $x = 7$ eli $q = -1$

$x = 3$, sarja $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eli suppenee

$x = 7$, sarja $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ suppenee itseisesti

eli suppenee

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$. Tehdään suhdetesti

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{2n+3}|}{(n+1)\cancel{n!}}}{\frac{|x^{2n+1}|}{\cancel{n!}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n+1} = 0$$ siispä sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{\sqrt{n}}$ Tehdään suhdetesti

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(5x)^n 5x}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(5x)^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 5x \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right|.$$

$= |5x|$. Siispä sarja suppenee ainakin kun $|5x| < 1$. Tutkitaan vielä $|5x| = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. hajaantuu kun $5x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ on vuorotteleva

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ja $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$ on vähenevä kun $n \geq 1$

$\Rightarrow$ suppenee kun $5x = -1$

Suppenee kun $-1 \leq 5x < 1$ eli $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{5}$

MS-A010 viikko 3 loppuviikon tuntitehtävien malliratkaisut

Yleisiä kaavoja ja käsitteitä ennen tehtäviä

L'Hospitalin sääntö

Olkoot f ja g jatkuvia ja derivoituvia funktioita joukossa $A \setminus \{a\}$, missä A on avoin väli, joka sisältää pisteen a. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{tai} \quad \pm\infty \quad \text{ja}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{on olemassa.}$$

Tällöin osamäärän raja-arvo L on sama kuin osoittajan derivaatan ja nimittäjän derivaatan osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Huomio! Ehto $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ tai $\pm\infty$ on muistettava aina tarkistaa, sillä muuten L'Hospitalin sääntöä ei voida käyttää!

Jatkuvuus

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä a, jos ja vain jos sen raja-arvo on olemassa tässä pisteessä ja se yhtyy funktion arvoon pisteessä a, so. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Funktion jatkuvuus pisteessä a voidaan osoittaa vetoamalla seuraavaan jatkuvuuden määritelmään.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä $a \in A$, kun pätee seuraava.

Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta \quad (1)$$

Tietyissä tapauksissa voi vaihtoehtoisesti käyttää suppiloperiaatetta, joka toimii seuraavalla tavalla.

Jos pätee

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ kaikilla $0 < |x - x_0| < \delta$, niin

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Huomio! Funktion jatkuvuus on välttämätön ehto, mutta ei riittävä ehto, funktion derivoitumiselle.

Derivoituvuus

Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivaatta pisteessä x_0, mikäli raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

on olemassa pisteessä x_0. Vaihtoehtoinen esitysmuoto on

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Kun raja-arvo on olemassa, niin funktion f derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alkeisfunktiot kuten kaikki polynomit, eksponenttifunktio, sin, cos, tan ja hyperboliset funktiot sekä näiden käänteisfunktiot ovat derivoituvia kaikkialla määrittelyjoukoissaan (ja näiden derivaatoille on olemassa derivointisäännöt). Näitä aritmeettisilla operaatioilla (summa, tulo, osamäärä) ja funktioita yhdistelemällä saadut funktiot ovat myös derivoituvia kaikkialla määrittelyjoukossaan — mahdollset nollalla jakamiset siis poislukien. Funktio onkin siis derivoituva täsmälleen silloin, kun sen derivaatan pystyy laskemaan (esimerkiksi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$ pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$). Huomioi kuitenkin, että esimerkiksi paloittain määriteltyjen funktioiden derivoituvuuden määrittäminen vaatii useimmiten derivoituvuuden tarkastelemisen erikseen päätepisteissä derivaatan määritelmään (2) tai (3) (erotusosamäärän raja-arvo) vetoamalla.

Huomio! Jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0, niin funktio f on tällöin myös jatkuva pisteessä x_0. Funktion derivoituvuus on siis vahvempi ominaisuus, kuin funktion jatkuvuus!

Taylor-polynomi

Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ on funktion paras n-asteinen, kertalukuun n asti derivaattojen arvot kehityskeskuksessa säilyttävä polynomiapproksimaatio pisteen x_0 (mahdollisesti pienessä) ympäristössä. Piste x_0 toimii Taylor-sarjan kehityskeskuksena. Jos funktio f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0, niin sen katkaistu Taylorin kehitelmä voidaan laskea kaavalla

$$P_n(x) = P_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \tag{4}$$

Tehtävä 1

Yleistä: Monissa alakohdissa on helpointa lähteä ratkomaan L'Hospitalin säännön avulla. Oletusarvoisesti sen käyttöä on hyvä siis harjoitella. Muitakin ratkaisuja on olemassa, esimerkiksi kohdassa a) on esitetty myös vaihtoehtoinen tapa raja-arvon määrittämiseksi.

a) Määrättävä $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2 \cdot x)}{x}$.

Tapa 1: Käytetään trigonometrisia kaavoja ja tunnettuja raja-arvoja hyödyksi. Pidetään tunnettuna, että $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$.[1]

Näin ollen saadaan

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2 \cdot x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot 2 \cdot \cos(x).$$

Pitämällä tunnettuna, että $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, saadaan

[1] Jatkon kannalta muutama äärimmäisen hyödylinen trigonometrinen identiteetti: $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \sin(y) \cdot \cos(x)$, joten erityisesti $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$. Lisäksi $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \cos(y)$, joten erityisesti $\cos(2 \cdot x) = \cos^2(x) - \sin(x)^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot 2\cdot\cos(x) = 2\cdot\cos(0) = 2\cdot 1 = 2.$$

Tapa 2: Käytetään L'Hospitalin sääntöä. Huomataan, että

$$\lim_{x\to 0}\sin(2\cdot x) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Siis $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, joten L'Hospitalin sääntöä voidaan käyttää:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\cdot x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(2\cdot x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(2\cdot x)}{1} = 2\cdot\cos(2\cdot 0) = 2.$$

b) Määrättävä $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

Tehtävä on helpointa ratkaista L'Hospitalin säännön avulla. Huomataan, että

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x - 1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Tällöin $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, joten L'Hospitalin sääntöä voidaan käyttää:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x - 1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 0}{1} = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

c) Määrättävä $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(3\cdot x) - 1}{x}$.

Helpointa taas käyttää L'Hospitalin sääntöä. Huomataan, että

$$\lim_{x\to 0}(\cos(3\cdot x) - 1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Tällöin $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, joten L'Hospitalin sääntöä voidaan käyttää:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3\cdot x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(3\cdot x)-1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot\sin(3\cdot x)-0}{1}$$
$$=-3\cdot 0=0.$$

Tehtävä 2

Yleistä: Tässä tehtävässä käy ilmi, että kaikkialla derivoituvan funktion derivaattafunktio ei välttämättä olekaan kaikkialla jatkuva. Tehtävässä myös demonstroidaan, miten paloittain määritellyn funktion derivoituvuus ja derivaatta voidaan laskea erillispisteissä erotusosamäärän raja-arvon avulla. Alakohdan a) ratkaisutavassa 2 on myös esitelty funktion jatkuvuuden todistamista jatkuvuuden (ε,δ)-ehdosta lähtien (kts. määritelmä (1)). Jatkuvuuden osoittaminen (ainakin tässä tehtävässä) on ylivoimaisesti helpointa ratkaisutavalla 1 suppiloperiaatetta käyttäen — kannattaa kuitenkin huomioida, että vaikka jatkuvuuden voikin tässä yhteydessä osoittaa äärimmäisen kätevällä suppiloperiaatteella, niin kaikki jatkuvat (reaalisen muuttujan) funktiot toteuttavat viime kädessä myös (ε,δ)-ehdon jatkuvuudelle.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ ja } f(x)=x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\text{, kun } x\neq 0\text{, ja } f(0)=0.$$

a) Tutkitaan, onko $f(x)$ jatkuva. Kun $x\neq 0$, niin funktio $f(x)=x^2\cdot\sin(\frac{1}{x})$ on jatkuvien alkeisfunktioiden yhdistelmänä jatkuva ainakin joukossa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Funktion arvo $f(0)=0$ on erikseen määritelty. Täten tutkitaan funktion f jatkuvuutta origossa $x=0$.

Tapa 1 (suppiloperiaate): Koska sini oskilloi lukujen -1 ja 1 välillä, niin kaikilla $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ seuraa, että

$$-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1\Rightarrow -|x^2|\leq x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq|x^2|,$$

joten

$$\lim_{x\to 0}-|x^2|\leq\lim_{x\to 0}x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq\lim_{x\to 0}|x^2|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Kun x lähestyy origoa, niin tarkasteltavan funktion raja-arvo "puristuu" nollaan. Suppiloperiaatteen nojalla funktiolla f on siis raja-arvo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ja erityisesti $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$, joten funktio f on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$

Tapa 2 (jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmä): Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ siten, että $\delta^2 = \varepsilon$ eli että $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ (tämän valinnan merkitys selviää todistuksen viimeisellä rivillä). Jatkuvuuden määritelmässä (1) nyt $a = 0$.

Olkoon $0 < |x - 0| < \delta$. Koska sini oskilloi lukujen -1 ja 1 välillä, niin erityisesti $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja voidaan laskea

$$|f(x) - f(0)| = \left|x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x^2| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x^2|.$$

Koska jatkuvuuden määritelmän nojalla oletettiin, että $0 < |x-0| < \delta$, niin tästä seuraa $0 < |x| < \delta$ ja edelleen $0 < |x^2| < \delta^2$. Koska valittiin $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, niin ylläolevasta päättelystä seuraa

$$|f(x) - f(0)| \leq |x^2| < \delta^2 = \varepsilon.$$

Tämän perusteella funktio $f(x) = x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$ on jatkuva pisteessä $x = 0$ arvolla $f(0) = 0$ ja on täten jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$

b) Tutkitaan, onko funktio $f(x)$ derivoituva. Funktion f arvo saadaan kaavalla $f(x) = x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$ kaikissa pisteissä paitsi origossa $x = 0$. Ensimmäiseksi derivoidaan funktiota $f(x)$ kun $x \neq 0$, jolloin saadaan

$$f'(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funktion $f(x)$ derivaatta on siis määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Origossa funktion arvo on määritelty eri kaavalla (sillä nollalla jakaminen on laiton operaatio), joten pisteessä $x = 0$ derivoitumista pitää tutkia erikseen. Käyttämällä kaavaa (3) voidaan funktion f derivaatta origossa määrätä erotusosamäärän raja-arvona

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa.

Olkoon $h \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2\cdot\sin(\frac{1}{h})-0}{h} = \frac{h\cdot\sin(\frac{1}{h})}{1} = h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Yllä olevalle raja-arvolle voidaan soveltaa suppiloperiaatetta samaan tapaan kuin kohdassa a). Tiivistetysti

$$\lim_{h\to 0} -|h| \leq \lim_{h\to 0} h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq \lim_{h\to 0}|h| \Rightarrow 0 \leq \lim_{h\to 0} h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq 0.$$

Suppiloperiaatteen nojalla siis erotusosamäärän raja-arvo on olemassa ja $\lim_{h\to 0} h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$, joten funktion derivaatta origossa on $f'(0) = 0$. Näin ollen $f(x)$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$

c) Kohdan b) perusteella voidaan todeta, että $f'(0) = 0$ ja $f'(x) = 2\cdot\sin(\frac{1}{x})\cdot x - \cos(\frac{1}{x})$, kun $x \neq 0$.

d) Jotta derivaattafunktio olisi jatkuva, tulee $f'(x)$ derivaattafunktion lähestyä arvoa $f'(0) = 0$, kun $x \to 0$. Tutkitaan derivaatan raja-arvoa nollassa.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Koska kohdassa b) todettiin, että $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})\cdot x = 0$, ei vakiolla 2 kertominen muuta lopputulosta. Tällöin jäljelle jää

$$\lim_{x\to 0} -\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

ja x lähestyessä nollaa kosinitermi saa alati tiuhempaa tahtiin arvoja -1 ja 1 väliltä. Täten derivaatta ei suppene arvoon $f'(0) = 0$, joten derivaattafunktio ei ole jatkuva origossa. Huomaa kuitenkin, että f' on jatkuva joukossa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Toinen tapa nähdä derivaattafunktion epäjatkuvuus origossa on soveltaa jonojatkuvuutta [Alestalon luentokalvot, s. 43]. Määritellään jono

$$x_n = \frac{1}{2\pi n},\ n \geq 1.$$

Tällöin selvästi $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten sijoittamalla $x \leftarrow x_n$ kaavaan $-\cos(\frac{1}{x})$ saadaan

$$-\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\cos(2\pi n) = -1 \xrightarrow{n\to\infty} -1 \neq 0 = f'(0),$$

joten selvästi derivaattafunktio ei ole jatkuva origossa. Itse asiassa jonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ muokkaamalla jonon $(\cos(\frac{1}{x_n}))_{n=1}^{\infty}$ raja-arvoksi voidaan saada mikä tahansa arvo väliltä $[-1, 1]$, esimerkiksi valitsemalla

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{(2n-1)\pi},\ n \geq 1,$$

saadaan

$$-\cos\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = f'(0).$$

Jonojatkuvuuden mukaan derivaattafunktio $g = f'$ on jatkuva origossa, jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n)$ kaikilla sellaisilla jonoilla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, joille $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Selvästikään tämä ehto ei toteudu funktiolle f' (raja-arvo, mikäli se on olemassa, on yksikäsitteinen), joten f' ei ole origossa jatkuva.

Tehtävä 3

Yleistä: Tehtävä on ensimmäinen katsaus Taylorin kehitelmien muodostamiseen käytännössä. Tärkeintä on ymmärtää, miten Taylorin polynomi voidaan rakentaa annetulle, n kertaa kehityskeskuksen a ympäristössä derivoituvalle funktiolle f, kunhan arvot $f^{(k)}(a)$ kyetään laskea derivaatan kertaluvuille $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Määritä 4 ensimmäistä termiä, kehityskeskus on a.

a) $f(x) = \sin(x)$, kehityskeskus $a = \frac{\pi}{4}$.

Lasketaan derivaattojen arvot kehityskeskuksessa:

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
eli vakiotermi on $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,