Toinen tapa nähdä derivaattafunktion epäjatkuvuus origossa on soveltaa jonojatkuvuutta [Alestalon luentokalvot, s. 43]. Määritellään jono

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \; n \geq 1.$$

Tällöin selvästi $x_n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten sijoittamalla $x \leftarrow x_n$ kaavaan $-\cos(\frac{1}{x})$ saadaan

$$-\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\cos(2\pi n) = -1 \xrightarrow{n\to\infty} -1 \neq 0 = f'(0),$$

joten selvästi derivaattafunktio ei ole jatkuva origossa. Itse asiassa jonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ muokkaamalla jonon $(\cos(\frac{1}{x_n}))_{n=1}^{\infty}$ raja-arvoksi voidaan saada mikä tahansa arvo väliltä $[-1, 1]$, esimerkiksi valitsemalla

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{(2n-1)\pi}, \; n \geq 1,$$

saadaan

$$-\cos\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = f'(0).$$

Jonojatkuvuuden mukaan derivaattafunktio $g = f'$ on jatkuva origossa, jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n)$ kaikilla sellaisilla jonoilla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, joille $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Selvästikään tämä ehto ei toteudu funktiolle f' (raja-arvo, mikäli se on olemassa, on yksikäsitteinen), joten f' ei ole origossa jatkuva.

Tehtävä 3

Yleistä: Tehtävä on ensimmäinen katsaus Taylorin kehitelmien muodostamiseen käytännössä. Tärkeintä on ymmärtää, miten Taylorin polynomi voidaan rakentaa annetulle, n kertaa kehityskeskuksen a ympäristössä derivoituvalle funktiolle f, kunhan arvot $f^{(k)}(a)$ kyetään laskea derivaatan kertaluvuille $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Määritä 4 ensimmäistä termiä, kehityskeskus on a.

a) $f(x) = \sin(x)$, kehityskeskus $a = \frac{\pi}{4}$.

Lasketaan derivaattojen arvot kehityskeskuksessa:

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
eli vakiotermi on $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
eli termin $(x-a)$ kerroin on $a_1 = \frac{1}{1!\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
eli termin $(x-a)^2$ kerroin on $a_2 = -\frac{1}{2!\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$,

$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
eli termin $(x-a)^3$ kerroin on $a_3 = -\frac{1}{3!\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}$.

Tämän jälkeen arvot voidaan sijoittaa kaavaan

$$P_3(x;\frac{\pi}{4}) = a_0 + a_1\cdot(x-a) + a_2\cdot(x-a)^2 + a_3\cdot(x-a)^3,$$

joten saadaan

$$P_3(x;\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4})^3.$$

b) $g(x) = \cos(x)$, kehityskeskus $a = \frac{\pi}{4}$.

Eräs tapa ratkaista tämä tehtävä on huomata, että koska $f' = g$ ja potenssisarjaesitys on yksikäsitteinen, niin haettu Taylorin kehitelmä olisi helppo saada määrittämällä funktion f neljännen asteen Taylorin kehitelmä ja derivoida tätä termeittäin.

Harjoituksen vuoksi lasketaan tämä tehtävä kuitenkin suoraan määritelmään vedoten.

$g(x) = \cos(x) \Rightarrow g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eli $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$g'(x) = -\sin(x) \Rightarrow g'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ eli $a_1 = -\frac{1}{1!\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$g''(x) = -\cos(x) \Rightarrow g''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ eli $a_2 = -\frac{1}{2!\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$,

$g^{(3)}(x) = \sin(x) \Rightarrow g^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eli $a_3 = \frac{1}{3!\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}$.

Tämän jälkeen arvot voidaan sijoittaa kaavaan

$$P_3(x;\frac{\pi}{4}) = a_0 + a_1\cdot(x-a) + a_2\cdot(x-a)^2 + a_3\cdot(x-a)^3,$$

joten saadaan

$$P_3(x;\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}\cdot(x-\frac{\pi}{4})^3.$$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$, kehityskeskus $a = 1$.

Lasketaan derivaattojen arvot kehityskeskuksessa:

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = 1$ eli $a_0 = 1$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -1$ eli $a_1 = -\frac{1}{1!} = -1$,

$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 2$ eli $a_2 = \frac{2}{2!} = 1$,

$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(3)}(1) = -6$ eli $a_3 = -\frac{6}{3!} = -1$.

Tämän jälkeen arvot voidaan sijoittaa kaavaan

$$P_3(x;1) = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + a_3 \cdot (x-a)^3,$$

joten saadaan

$$P_3(x;1) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3.$$

MS-A010 viikko 3 loppuviikon kotitehtävien malliratkaisut

Tehtävä 4

Funktion $f : x \mapsto \sin(x^2)$ Taylorin kehitelmä origon suhteen (eli Maclaurin-sarja) on

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

Määrää $f'(0), f'''(0)$ ja $f^{(10)}(0)$.

Tehtävän ratkaisemiseksi verrataan funktion $f : x \mapsto \sin(x^2)$ potenssisarjaesitystä termeittäin sen esitykseen Taylorin sarjana

$$P(x) = P(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Maclaurin-sarjassa $x_0 = 0$ eli $(x - x_0)^k = x^k$, joten derivaattojen arvot voidaan lukea potenssisarjaesityksen kertoimista.

Koska nyt

$$\begin{aligned} &x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} + \dots \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja potenssisarjaesitys on yksikäsitteinen, niin termien x, x^3 ja x^{10} kertoimet voidaan asettaa yhtäsuuriksi yhtälön oikean ja vasemman puolen kesken.

Asettamalla $0 \cdot x = f'(0)x$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ saadaan $f'(0) = 0$. Toisin sanoen koska sarjakehitelmässä ei esiinny ensimmäisen asteen termiä x, niin derivaatan arvo kehityskeskuksessa on 0.

Asettamalla $0 \cdot x^3 = \frac{1}{3!} f'''(0) x^3$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ saadaan $f'''(0) = 0$. Perustelu täysin sama, kuin ensimmäisen kertaluvun derivaatan suhteen.

Asettamalla $\frac{x^{10}}{5!} = \frac{1}{10!} f^{(10)}(0) x^{10}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ saadaan $f^{(10)}(0) = \frac{10!}{5!} = 30\,240$. Tässä tapauksessa sarjakehitelmästä siis löytyy nollasta poikkeava, astetta 10 oleva termi, joten myös 10. kertaluvun derivaatta on nollasta poikkeava.

Tehtävä 5

Määritä seuraavien sarjojen summa

a) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots$

Merkitään $y = x^2$, jolloin annetulle sarjalle

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots &= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

b) $1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \ldots$

Eksponenttifunktiolle

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ -\mathrm{e}^{-x} &= -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ \Rightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots) \\ \Rightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2x(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots), \end{aligned}$$

joten olettamalla, että $x \neq 0$, saadaan tehtävänannon sarjalle esitys

$$1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \ldots = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Oikealla puolella oleva termi voidaan sieventää muotoon[1] $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x} = \frac{\sinh(x)}{x}$, $x \neq 0$, ja antamalla $x \to 0$ seuraa vasemmanpuolisesta sarjakehitelmästä välittömästi, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1.$$

Siispä tehtävänannon sarja vastaa funktiota

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(x)}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Matemaattisessa kirjallisuudessa tätä funktiota merkitään usein $f = \mathrm{sinhc}$.

[1] Hyperbolisen sinin määritelmä: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.