1. a) $$f(t) = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$$

Tiedetään, että:

$$f(0) = 200 \quad (1)$$

$$f(1) = 1000 \quad (2)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 10\,000 \quad (3)$$

Siispä:

$$200 = \frac{L}{1 + M} \quad (1)$$

$$1000 = \frac{L}{1 + \frac{M}{e^k}} \quad (2)$$

$$10\,000 = L \quad (3)$$

eli $$200 = \frac{10\,000}{1 + M}$$

$$\Rightarrow \quad 200 + 200M = 10\,000$$

$$2 + 2M = 100$$

$$M = 49$$

siis

$$1000 = \frac{10000}{1 + \frac{49}{e^k}}, \quad \text{sij} \quad A = e^{-k}$$

$$1000(1 + 49A) = 10000$$

$$1 + 49A = 10$$

$$A = \frac{9}{49}$$

$$e^{-k} = \frac{9}{49}$$

$$-k = \ln\left(\frac{9}{49}\right)$$

$$k = \ln\left(\frac{49}{9}\right)$$

1. b) $$f(3) = \frac{L}{1 + Me^{-k \cdot 3}}$$

$$-k \cdot 3 = \ln\left(\frac{9}{49}\right) \cdot 3 = \ln\left(\left(\frac{9}{49}\right)^3\right)$$

$$= \frac{L}{1 + \left(\frac{9}{49}\right)^3 \cdot M}$$

$$= \frac{10\,000}{1 + \left(\frac{9}{49}\right)^3 \cdot 49}$$

$$= \frac{10\,000}{1 + \frac{9^3}{49^2}}$$

$$= 10\,000 \cdot \left(\frac{9^3 + 49^2}{49^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{10000 \cdot 49^2}{9^3 + 49^2}$$

$$\approx 7670$$

1. c) Lasketaan muutosnopeus eli derivaatta $f'(3)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{L}{1 + Me^{-kt}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(1 + Me^{-kt}\right) \cdot \frac{-L}{(1 + Me^{-kt})^2}$$

$$= -Mke^{-kt} \cdot \frac{-L}{(1 + Me^{-kt})^2}$$

$$= \frac{MLke^{-kt}}{(1 + Me^{-kt})^2}$$

$$e^{-kt} = \left(\frac{9}{49}\right)^3$$

$$f'(3) = MLk \cdot \left(\frac{\left(\frac{9}{49}\right)^3}{\left(1 + 49 \cdot \left(\frac{9}{49}\right)^3\right)^2}\right)$$

$$= 49 \cdot 10\,000 \cdot \ln\left(\frac{49}{9}\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{9}{49}\right)^3}{\left(1 + 49 \cdot \left(\frac{9}{49}\right)^3\right)^2}\right)$$

$f'(3) \approx 3030$ (sairastuttu/kk)

2. Funktio on jatkuva pisteessä jos ja vain jos sillä on raja-arvo L joka on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Koska $\frac{x}{\ln(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{e^x - 1}{x}$

Origon ympäristössä, myös

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Lasketaan siis raja-arvot

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1 \quad \Bigg| \; \text{L'Hospital} \; \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Siis $1 \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Koska $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, $f(0) = 1$

3. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

a) $e^{-3x}\cosh(kx)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{(-3+k)x} + e^{(-3-k)x}\right)$

$\lim_{x\to\infty} e^{ax}$ lähestyy

- ∞ kun $a > 0$
- 1 kun $a = 0$
- 0 kun $a < 0$

Siis jos $-3+k > 0$ tai $-3-k > 0$

eli $k > 3$ tai $k < -3$

$\lim_{x\to\infty} e^{-3x}\cosh(kx) = \infty$

Muulloin molemmat
termit lähestyvät
äärellisiä raja-arvoja.

3 b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(e^{kx}-e^{-kx})}{\cancel{\frac{1}{2}}(e^{2x}+e^{-2x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{e^{2x}(1+e^{-4x})}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(k-2)x} - e^{(-k-2)x}}{1+e^{-4x}}.$$

Nimittäjä suppenee kohti lukua 1, kun $x\to\infty$, joten siitä ei tarvitse huolehtia.
Lauseke suppenee silloin, kun sekä $e^{(k-2)x}$ että $e^{(-k-2)x}$ suppenevat eli kun

$$k-2 \le 0 \quad \text{ja} \quad -k-2 \le 0 \qquad \text{eli} \qquad k \le 2 \quad \text{ja} \quad k \geq -2.$$

Toisaalta jos $k>2$, niin $k-2>0$ ja $-k-2<-4$, joten $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = +\infty$.
Vastaavasti jos $k<-2$, niin $k-2<-4$ ja $-k-2>0$, joten $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = -\infty$.

Vastaus: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)}$ suppenee täsmälleen silloin, kun $-2 \le k \le 2$.

4. - ääriarvokohta : Sellainen piste, jonka ympäristössä olevissa pisteissä funktion arvo on aina joko suurempi (minimi) tai pienempi (maksimi) kuin pisteessä

- voi esiintyä vain 1. derivaatan nollakohdissa

- käännepiste : piste jossa funktion kaarevuussuunta muuttuu

- voi esiintyä vain 2. derivaatan nollakohdissa

Lisäksi kyseisen derivaatan nollakohdassa derivaatan etumerkin on muututtava.

Tutkitaan funktiota $x \mapsto xe^{-x}$ (nimetään f:ksi)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Nollakohdat: $0 = (1-x)e^{-x}$

$$\Rightarrow 1 - x = 0$$

$$x = 1$$

e^{-x} ei vaikuta etumerkkiin. $1-x$ on selvästi positiivinen kun $x < 1$ ja negatiivinen kun $x >$ $\Rightarrow x = 1$ on ääriarvokohta

f'	$+$	$-$
f	↗	↘

1

Tutkitaan käännepisteitä 2. derivaatan avulla.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left((1-x)e^{-x}\right)$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (x-1)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 = (x-2)e^{-x} \quad \Big| \; e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \text{eli} \quad x = 2$$

Kuten äsken, nähdään että 2. derivaatan etumerkki vaihtuu nollakohdassa. Siis:

f''	$-$	$+$
f	↷	↶

2

Lisäksi huomataan että $f(0)=0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Piirretään näitä hyödyntäen kuvaaja