5. $f(x) = \frac{T}{\omega} \cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$

a) Tiedetään että f on symmetrinen (cosh on)

eli $f(a) = f(-a) \Rightarrow f\left(-\frac{T}{\omega}\right) = f\left(\frac{T}{\omega}\right)$

Lisäksi $f'(x) = \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$ jolla on

$(f' > 0,\ x > 0)$ nollakohta

$x = 0$, jolloin se on minimi. kun $x > 0$

f on siis aidosti kasvava, joten suurin arvo

on välin päätepisteessä $x = \frac{T}{\omega}$

$$h(T, \omega) = f\left(\frac{T}{\omega}\right) - f(0)$$

$$= \frac{T}{\omega}\left(\cosh(1) - \cosh(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e^{1} - e^{-1} - e^{0} - e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e - \frac{1}{e} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right)^{2} \quad \Big/ \text{ kikkailua}$$

$$= 2\frac{T}{\omega}\sinh^{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) Koska $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$ ja $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$, niin

$$f'(x) = \cancel{\frac{\omega}{T}} \cdot \cancel{\frac{T}{\omega}} \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right) = \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right), \qquad (1)$$

$$f''(x) = \frac{\omega}{T}\cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right). \qquad (2)$$

Lähdetään liikkeelle sieventämällä oikeanpuolista lausetta:

$$\frac{\omega}{T}\sqrt{1+f'(x)^2} \overset{(1)}{=} \frac{\omega}{T}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{\omega x}{T}\right)}$$

| $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{\omega}{T}\sqrt{\cosh^2\left(\frac{\omega x}{T}\right)}$$

| cosh positiivinen, parillinen ja ylöspäin aukeava funktio $\Rightarrow \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{\omega}{T}\cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$$

$$\overset{(2)}{=} f''(x),$$

kuten haluttiin osoittaa.

Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Malliratkaisut, Loppuviikko 4, teht 1-3

1. Kahvin lämpötilan muutosnopeus:

$$r(t) = -7e^{-0{,}1t} \; [C°/min]$$

Kahvin lämpötila ajanhetkellä t:

$$l(t) = \int r(t)\,dt$$

$$= \int -7e^{-0{,}1t}\,dt = -7\left(-\frac{1}{0{,}1}e^{-0{,}1t} + C\right)$$

$$= 70e^{-0{,}1t} + C$$

Määritetään vakio C:

Kun $t=0$, kahvin lämpötila on $90°$, ts. $l(0) = 90°$

$$90 = 70e^{-0{,}1\cdot 0} + C \Leftrightarrow 90 = 70 + C$$

$$\Leftrightarrow C = 90 - 70 = \underline{\underline{20}}$$

Kahvin lämpötila, kun $t = 10$ [min]:

$$l(10) = 70e^{-0{,}1\cdot 10} + 20 = 45{,}7516\ldots \approx 46\,°C$$

V: $\underline{\underline{46\,°C}}$

2. Muutama laskusääntö:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

a) Keskimääräinen väestö vuosien 2010 ja 2050 välillä

$\Rightarrow$ 2050 - 2010 = 40 vuoden ajalta siis

$$\Rightarrow \frac{1}{40}\int_0^{40} 112 \cdot 1{,}011^t\, dt = \frac{112}{40}\int_0^{40} e^{t\ln 1{,}011}\, dt$$

$$= \frac{112}{40} \cdot \Big/_0^{40} \frac{1}{\ln 1{,}011} e^{t(\ln 1{,}011)}$$

$$= \frac{112}{40 \cdot \ln 1{,}011} \Big/_0^{40} 1{,}011^t$$

$$= \frac{112}{40 \cdot \ln 1{,}011}\left(1{,}011^{40} - 1\right)$$

$$= 140{,}508\ldots \approx 140{,}5 \text{ milj}$$

b) Vuosien 2010 ja 2050 väestöjen keskiarvo:

$$\frac{P(0) + P(40)}{2} = \frac{112 + 112 \cdot 1{,}011^{40}}{2} \approx 142{,}74\ldots = 142{,}7 \text{ milj.}$$

c) Tulokset poikkeavat toisistaan siksi että väestön kasvua kuvaava funktio $P(t)$ ei ole lineaarinen.

Alkutilan ja lopputilan keskiarvo ei ota huomioon vuosien aikana tapahtuneita epälineaarista kehitystä.