Diffis 1 alkuviikon 5 tuntitehtävät

Differentiaaliyhtälöiden (DY) ominaisuuksia

Kertaluku

Differentiaaliyhtälön kertaluku on yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku, esim. DY $y^{(6)}+y = r(x)$ on kertaluvultaan 6.

Lineaarisuus

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen lineaarikombinaatiot ovat myös DY:n ratkaisuja. Lineaarinen kertaluokan n DY on muotoa

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

DY on homogeeninen jos $r(x) = 0$, muuten DY on epähomogeeninen.

Separoituva DY

Separoituvat DY:t ovat differentiaaliyhtälöitä, jotka pystytään kirjoittamaan muodossa

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \tag{1}$$

jossa y' on y:n derivaatta muuttujan x suhteen ja g ja f ovat funktioita. Separoituva DY voidaan ratkaista integroimalla yhtälöä (1) puolittain. Huomioimalla, että y' on yhdistetyn funktion $1/g(y)$ sisäfunktion derivaatta, voidaan DY ratkaista kuten

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad H(y) = F(x) + C,$$

jossa $F'(x) = f(x)$ ja $H'(y) = 1/g(y)$.

Tehtävä 1

a)

$$y'' + \frac{1}{x-1}y' + xy = \mathrm{e}^x.$$

Lineaarinen, 2. kertaluvun epähomogeeninen DY, joka määritelty, kun $x < 1$ tai $x > 1$.
b)

$$2x + (6y\mathrm{e}^y - x^2)y' = 0.$$

Epälineaarinen, 1. kertaluvun DY. Yhtälö ei ole lineaarinen, sillä siinä esiintyy muotoa e^y oleva termi derivaatan y' kertoimena.
c)

$$2x^2y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} = x^2\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2y(u_x)^2u_z = x^2u_x.$$

Epälineaarinen, 1. kertaluvun ODY. Tehtävässä $u = u(x, y, z)$ on usean muuttujan funktio, joten kyseessä on osittaisdifferentiaaliyhtälö. Yhtälö ei ole lineaarinen, sillä eri muuttujien osittaisderivaattojen tulo $(u_x)^2 u_z$ esiintyy yhtälössä.
d)

$$\cos x - \sin y - (y'')^2 = 0.$$

Epälineaarinen, 2. kertaluvun DY. Yhtälö on epälineaarinen, sillä siinä esiintyvät termit $\sin y$ ja $(y'')^2$. Neliöön korottaminen ei muuta DY:n kertaluokkaa.
e)

$$y'(y(x)) = y(x).$$

Epälineaarinen, 1. kertaluvun DY. Koska y esiintyy funktion y' argumentissa, ei kyseessä voi olla lineaarinen DY. Korkein yhtälössä esiintyvä derivaatan kertaluku on 1.

Tehtävä 2

Lasketaan tehtävänannon funktioiden derivaatat:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \mathrm{e}^{x^2} &&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 2x\mathrm{e}^{x^2},\\
y_2 &= \mathrm{e}^{2x} &&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{2x},\\
y_3 &= \mathrm{e}^{-2x} &&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = -2\mathrm{e}^{-2x},\\
y_4 &= x\mathrm{e}^{2x} &&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

a) Kokeilemalla havaitaan, että funktio y_1 toteuttaa yhtälön

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 2x\mathrm{e}^{x^2} = 2xy_1.$$

Ratkaistaan kuitenkin harjoituksen vuoksi annettu DY $y' = 2xy$. Havaitaan, että DY:llä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Poistetaan tämä tarkastelusta, jolloin separoimalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy && \text{(siirretään } y\text{:t vasemmalle puolelle ja } x\text{:t oikealle puolelle)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\,\mathrm{d}x && \text{(integroidaan puolittain)}\\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x && \text{(lisähuomio: vasemmanpuolinen integraali on täsmälleen } \textstyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x)\\
\Leftrightarrow\ &\ln|y| = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)}\\
\Leftrightarrow\ &|y| = \mathrm{e}^{x^2+C},\ C \in \mathbb{R} && \text{(puolittain eksponentointi kumoaa logaritmin)}\\
\Leftrightarrow\ &|y| = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{x^2},\ C \in \mathbb{R} && \text{(käytettiin laskusääntöä } a^{b+c} = a^b a^c,\ a > 0,\ b, c \in \mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\ &y = \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{x^2},\ C \in \mathbb{R} && \text{(eliminoitiin itseisarvopalkit)}\\
\Leftrightarrow\ &y = D\mathrm{e}^{x^2},
\end{aligned}$$

jossa uusi vakio määritelty $D = \pm\mathrm{e}^C$, kun $C \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että arvo $D = 0$ vastaa täsmälleen DY:n triviaaliratkaisua $y(x) = 0$, joten DY:n yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y = D\mathrm{e}^{x^2},\ D \in \mathbb{R}.$$

Toisin sanoen, *kaikki* DY:n ratkaisut ovat yllä olevaa muotoa. Havaitaan, että vakio $D = 1$ vastaa tehtävänannon funktiota y_1. Funktiot y_2, y_3 tai y_4 eivät puolestaan ole DY:n ratkaisuja millään vakion arvolla $D \in \mathbb{R}$.

b) Kokeilemalla havaitaan, että funktio y_3 toteuttaa yhtälön

$$\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = -2\mathrm{e}^{-2x} = -2y_3 = -2y_3^{-1}y_3^2 = -2\mathrm{e}^{2x}y_3^2.$$

Ratkaistaan kuitenkin harjoituksen vuoksi annettu DY $y' = -2\mathrm{e}^{2x}y^2$. Havaitaan, että DY:llä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Poistetaan tämä tarkastelusta, jolloin separoimalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\mathrm{e}^{2x}y^2 && \text{(siirretään } y\text{:t vasemmalle puolelle ja } x\text{:t oikealle puolelle)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x && \text{(integroidaan puolittain)}\\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x && \text{(lisähuomio: vasemmanpuolinen integraali on täsmälleen } \textstyle\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,\mathrm{d}x\text{)}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{y} = -\mathrm{e}^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)}\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x} + D},\ D = -C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Huomaa, että jos $D < 0$, niin ratkaisu ei määritelty pisteessä $x = \frac{1}{2}\ln(-D)$. Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa tehtävänannon funktiota y_3. Funktiot y_1, y_2 tai y_4 eivät puolestaan ole DY:n ratkaisuja millään vakion arvolla $D \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 3

Ratkaistava DY

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+1}{x}.$$

DY määritelty joukossa $x < 0$ tai $x > 0$.

DY:llä on triviaaliratkaisu $y(x) = -1$, kun $x < 0$ tai $x > 0$. Poistetetaan tämä tarkastelusta, jolloin separoimalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+1}{x} && \text{(siirretään } y\text{:t vasemmalle puolelle ja } x\text{:t oikealle puolelle)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x} && \text{(integroidaan puolittain)}\\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} && \text{(lisähuomio: vasemmanpuolinen integraali on täsmälleen } \textstyle\int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\,\mathrm{d}x\text{)}\\
\Leftrightarrow\ &\ln|y+1| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)}\\
\Leftrightarrow\ &|y+1| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C},\ C \in \mathbb{R} && \text{(puolittain eksponentointi kumoaa logaritmin vasemmalta)}\\
\Leftrightarrow\ &|y+1| = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\ln|x|},\ C \in \mathbb{R} && \text{(käytettiin laskusääntöä } a^{b+c} = a^b a^c,\ a > 0 \text{ ja } b, c \in \mathbb{R}\text{)}\\
\Leftrightarrow\ &|y+1| = \mathrm{e}^{C}|x| && \text{(eliminoidaan itseisarvopalkit)}\\
\Leftrightarrow\ &y + 1 = \pm\mathrm{e}^{C}x\\
\Leftrightarrow\ &y = Dx - 1,
\end{aligned}$$

jossa uusi vakio määritelty $D = \pm\mathrm{e}^{C}$, kun $C \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että arvo $D = 0$ vastaa täsmälleen DY:n triviaaliratkaisua $y(x) = -1$, joten DY:n yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y = Dx - 1,\ D \in \mathbb{R}.$$

Tehtävänannon DY on määritelty joukossa $x < 0$ tai $x > 0$, mutta huomaa, että DY:n varsinainen ratkaisu on kuitenkin mahdollista jatkaa origoon.

Tehtävä 4

Kaikkien alakohtien DY:t voidaan ratkaista suoraan integroimalla.

a)

$$y(x) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int 3\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

b)

$$y(x) = \int 8\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -8\mathrm{e}^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

c)

$$y(x) = \int -5\cos(6x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{6}\sin(6x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

d)

$$y(x) = \int 2\sin(7x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{7}\cos(7x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$