Diffis 1 alkuviikon 5 kotitehtävät

Tehtävä 4

Kaikkien alakohtien DY:t voidaan ratkaista suoraan integroimalla.
a)
$$y(x) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int 3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
b)
$$y(x) = \int 8\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -8\mathrm{e}^{-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
c)
$$y(x) = \int -5\cos(6x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{6}\sin(6x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
d)
$$y(x) = \int 2\sin(7x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{7}\cos(7x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 5

Ratkaistava DY
$$y^3 + x^3 - xy^2y' = 0.$$
Havaitaan, että DY ei ole lineaarinen tai separoituva annetussa muodossa. Tehtävässä pääsee eteenpäin suorittamalla muuttujanvaihto — ilmeiseltä tuntuvia sijoituksia on muutama kappale.

Ratkaisu muuttujanvaihdolla $v = \frac{y}{x}$

Kokeilemalla muuttujanvaihtoa $v = \frac{y}{x}$ saadaan $y' = v + xv'$. Tällöin DY voidaan saattaa muotoon
$$y^3 + x^3 - xy^2y' = 0 \Leftrightarrow x^3v^3 + x^3 - x^3v^2(v + xv') = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^3v^3} + x^3 - \cancel{x^3v^3} - x^4v^2v' = 0 \Leftrightarrow x^4v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^3,$$
kunhan $x < 0$ tai $x > 0$. Tämä DY on selvästikin separoituva, jonka ratkaisuksi saadaan
$$\begin{aligned}
x^4v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^3 &\Leftrightarrow v^2\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x} && \text{(integroidaan puolittain)}\\
&\Leftrightarrow \int v^2\,\mathrm{d}v = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}v^3 = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)}\\
&\Leftrightarrow v^3 = 3\ln|x| + D,\ D := 3C \in \mathbb{R} && \text{(otetaan kuutiojuuri puolittain)}\\
&\Leftrightarrow v = \sqrt[3]{3\ln|x| + D},\ D \in \mathbb{R} && (v = \tfrac{y}{x})\\
&\Leftrightarrow y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + D},\ D \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$
joka on määritelty, kun $x < 0$ tai $x > 0$. Kannattaa huomata, että vaikka $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$, niin löydetty ratkaisu ei kuitenkaan ole derivoituva origossa.

Ratkaisu muuttujanvaihdolla $v = y^3$

Toinen tyrkyllä oleva muuttujanvaihto on $v = y^3$, jolloin $v' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^3 = 3y^2 y'$. Yhtälö voidaan siis kirjoittaa funktion v DY:nä muodossa

$$y^3 + x^3 - xy^2 y' = 0 \Leftrightarrow v + x^3 - \frac{1}{3} x v' = 0 \Leftrightarrow xv' - 3v = 3x^3,$$

joka on lineaarinen 1. kertaluvun EHY.

DY:n voi ratkaista esimerkiksi seuraavilla kahdella tavalla.

Tapa 1: 1. kertaluvun lineaarisen DY:n ratkaisumenetelmä

Aloitetaan jakamalla DY termin y' kertoimella

$$xv' - 3v = 3x^3 \Leftrightarrow v' - \frac{3}{x} v = 3x^2, \text{ kun } x < 0 \text{ tai } x > 0,$$

jolloin DY on nyt saatettu nk. normaalimuotoon $v' + p(x)v = q(x)$. Tällaisille DY:ille voidaan määrittää ratkaisu seuraavin askelin:

i. Määrätään integroiva tekijä asettamalla $u(x) = \exp\bigl(\int p(x)\,\mathrm{d}x\bigr)$.[1]

ii. Kerrotaan DY:tä puolittain integroivalla tekijällä $u(x) \neq 0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
& v'(x) + p(x)v(x) = q(x) \\
& \Leftrightarrow u(x)v'(x) + u(x)p(x)v(x) = u(x)q(x) && \Bigl(\text{ketjusääntö } u'(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\bigl(\textstyle\int p(x)\,\mathrm{d}x\bigr) = p(x)u(x)\Bigr) \\
& \Leftrightarrow u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = u(x)q(x) && \Bigl(\text{tulon derivointisääntö } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x)) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\Bigr) \\
& \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(u(x)v(x)\bigr) = u(x)q(x) && (\text{integroidaan puolittain}) \\
& \Leftrightarrow u(x)v(x) = \int u(x)q(x)\,\mathrm{d}x + C, \ C \in \mathbb{R} && (\text{integroimisvakiota ei saa unohtaa!}) \\
& \Leftrightarrow v(x) = \exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int u(x)q(x)\,\mathrm{d}x + C\right), \ C \in \mathbb{R}. && \Bigl(\tfrac{1}{u(x)} = \exp\bigl(-\textstyle\int p(x)\,\mathrm{d}x\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

Tässä tehtävässä siis $p(x) = -\frac{3}{x}$ ja $q(x) = 3x^2$, kun $x < 0$ tai $x > 0$. Sopiva ehdokas integroivaksi tekijäksi saadaan laskemalla[2]

$$\exp\left(\int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-3\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x^{-3}} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \text{ kun } x > 0.$$

Integroivaksi tekijäksi kannattaa siis *valita* ylläolevan lausekkeen laajennus suurempaan alueeseen

$$u(x) = \frac{1}{x^3}, \text{ kun } x < 0 \text{ tai } x > 0,$$

[1] Koska on meidän vastuullamme *valita* sopiva funktio integroivaksi tekijäksi, voi integroimisvakioksi *valita* nollan. Huomaa lisäksi, että tässä on esteettisistä syistä merkitty $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

[2] Lisätieto: huomaa, että jos $x < 0$, niin luonnollista logaritmia $\ln x$ ei ole olemassa! Kun $x < 0$, niin voidaan käyttää kompleksilukujen kunnan nk. logaritmin päähaaraa, jolle erityisesti pätee $\operatorname{Log} x = \ln(-x) + \mathrm{i}\pi$, kun $x < 0$. Näin ollen $\int -3/x\,\mathrm{d}x = -3\operatorname{Log} x = -3(\ln(-x) + \mathrm{i}\pi)$ ja Eulerin kaavasta $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ seuraa, että $u(x) = \mathrm{e}^{-3\operatorname{Log} x} = \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi - 3\ln(-x)} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{-3}\mathrm{e}^{\ln((-x)^{-3})} = -(-x)^{-3} = 1/x^3$, kun $x < 0$. Tulos on siis konsistentti tapauksen $x > 0$ kanssa! Aiheesta lisää löytyy esimerkiksi kurssisivun Materiaalit-välilehdellä olevasta tiivistelmästä *Kompleksiluvuista* [Alestalo, erityisesti s. 7–9].

jolloin DY:lle saadaan joukossa $x < 0$ tai $x > 0$ ratkaisuksi

$$\begin{aligned}
& v' - \frac{3}{x}v = 3x^2 && \text{(kerrotaan integroivalla tekijällä } u(x) = 1/x^3\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x^3}v' - \frac{3}{x^4}v = \frac{3}{x} && \text{(sovelletaan tulon derivointisääntöä)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^3}v\right) = \frac{3}{x} && \text{(integroidaan puolittain)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x^3}v = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x && \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x^3}v = 3\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)} \\
\Leftrightarrow\ & v = 3x^3\ln|x| + Cx^3,\ C \in \mathbb{R} && (v = y^3) \\
\Leftrightarrow\ & y^3 = 3x^3\ln|x| + Cx^3,\ C \in \mathbb{R} && \text{(lasketaan kuutiojuuri puolittain)} \\
\Leftrightarrow\ & y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C},\ C \in \mathbb{R}, &&
\end{aligned}$$

joka on ratkaisu, kun $x < 0$ tai $x > 0$.

Huomio! Ratkaisumenetelmää voi soveltaa kaikille 1. kertaluvun lineaarisille DY:ille. Logaritmin reaalisuutta ja kompleksisuutta ei kannata jäädä miettimään liiaksi: pääpointti on, että menetelmä toimii kunhan (sopivasti sievennetyn) integroivan tekijän osaa vain muotoilla laajimmassa mahdollisessa joukossa. :)

Seuraava ratkaisutapa soveltuu myös yleisemmille lineaarisille DY:ille.

Tapa 2: HY:n ratkaisu ja vakion variointi

Tarkastellaan aluksi HY:ä

$$xv' - 3v = 0.$$

Tämä DY on selvästikin separoituva, joten poistamalla tarkastelusta triviaaliratkaisu $v(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, saadaan separoimalla

$$\begin{aligned}
xv' - 3v = 0 \Leftrightarrow\ & x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3v && \text{(siirretään } v\text{:t vasemmalle puolelle ja } x\text{:t oikealle puolelle)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x && \text{(integroidaan puolittain)} \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x && \\
\Leftrightarrow\ & \log|v| = 3\log|x| + C,\ C \in \mathbb{R} && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)} \\
\Leftrightarrow\ & |v| = \mathrm{e}^C|x|^3,\ C \in \mathbb{R} && \\
\Leftrightarrow\ & v = \pm\mathrm{e}^C x^3,\ C \in \mathbb{R} && \\
\Leftrightarrow\ & v = Dx^3, &&
\end{aligned}$$

jossa uusi vakio määritelty $D = \pm\mathrm{e}^C$. Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa triviaaliratkaisua $v(x) = 0$, joten HY:n yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$v = Dx^3,\ D \in \mathbb{R}.$$

Lineaarisen DY:n ratkaisu saadaan lisäämällä HY:n ratkaisuun jokin EHY:n yksittäisratkaisu. Yksittäisratkaisun löytäminen voi joskus olla vaikeaa, joten kokeillaan *vakion variointina* tunnettua tekniikkaa, jossa HY:n ratkaisussa esiintyvä vakio $D \in \mathbb{R}$ korvataan muuttujasta x riippuvalla funktiolla $D = D(x)$. Tällöin sekä HY:n ratkaisu että sen derivaatta saavat esitykset

$$v = D(x)x^3, \tag{1}$$

$$v' = D'(x)x^3 + 3D(x)x^2. \tag{2}$$

Seuraavaksi kaavat (1) ja (2) sijoitetaan EHY:öön $xv' - 3v = 3x^3$, josta pyritään ratkaisemaan funktio $D = D(x)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
xv' - 3v = 3x^3 &\Leftrightarrow x(D'(x)x^3 + 3D(x)x^2) - 3D(x)x^3 = 3x^3 \\
&\Leftrightarrow D'(x)x^4 + \cancel{3D(x)x^3} - \cancel{3D(x)x^3} = 3x^3 && \text{(jaetaan yhtälö puolittain termillä } x^4\text{)} \\
&\overset{\substack{x<0 \\ \text{tai } x>0}}{\Leftrightarrow} D'(x) = \frac{3}{x} && \text{(integroidaan puolittain)} \\
&\Leftrightarrow D(x) = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}. && \text{(integroimisvakiota ei saa unohtaa!)}
\end{aligned}$$

EHY:n yleinen ratkaisu saadaan sijoittamalla funktion $D = D(x)$ kaava HY:n ratkaisuun, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&v = D(x)x^3 = (3\ln|x| + C)x^3 = 3x^3\ln|x| + Cx^3,\ C \in \mathbb{R} && (v = y^3) \\
&\Leftrightarrow y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C},\ C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

joka on DY:n ratkaisu joukossa $x < 0$ tai $x > 0$.

Viitteet

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Kompleksiluvut.* Aalto-yliopisto, 2016.
https://mycourses.aalto.fi/pluginfile.php/319499/mod_resource/content/1/kompleksi.pdf

MS-A0105 viikko 5 loppuviikon tuntitehtävien malliratkaisut

13/14.10.2016

Tehtävä 1

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^4,\ y(2) = 3.$

Määritetään ensin yleinen ratkaisu. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö, josta tiedetään funktion y derivaatta. Funktio y saadaan integroimalla yhtälöä puolittain:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^4 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}y = x^4\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \int 1\,\mathrm{d}y = \int x^4\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y = \frac{x^5}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan yleiseen ratkaisuun alkuarvo $y(2) = 3$ ja ratkaistaan sen perusteella vakiolle C arvo:

$$
\begin{aligned}
&y(x) = \frac{2^5}{5} + C = 3 \\
&\Leftrightarrow C = 3 - \frac{2^5}{5} = 3 - \frac{32}{5} = \frac{15}{5} - \frac{32}{5} = -\frac{17}{5}.
\end{aligned}
$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$
y(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{17}{5}.
$$

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^{3/2},\ y(3) = 7.$

Määritetään ensin yleinen ratkaisu. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö, josta tiedetään funktion y derivaatta. Funktio

y saadaan integroimalla yhtälöä puolittain:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^{3/2} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}y = x^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \int 1\,\mathrm{d}y = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y = \frac{2\cdot x^{5/2}}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan yleiseen ratkaisuun alkuarvo $y(3) = 7$ ja ratkaistaan sen perusteella vakiolle C arvo:

$$\begin{aligned}
&y(3) = \frac{2\cdot 3^{5/2}}{5} + C = 7 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3^5}}{5} + C = 7 \\
&\Leftrightarrow C = 7 - \frac{2\cdot\sqrt{81\cdot 3}}{5} = \frac{35}{5} - \frac{2\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{3}}{5} = \frac{35 - 18\cdot\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y(x) = \frac{2\cdot x^{5/2}}{5} + \frac{35 - 18\cdot\sqrt{3}}{5}.$$

Tehtävä 2

$y''(x) - \cos(x) = 3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

Kyseessä on toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka on epähomogeeninen. Yleisen ratkaisun määrittämiseksi esitetään harjoituksen vuoksi kaksi tapaa.

Helppo tapa: suora integrointi

Siirretään epähomogeeninen termi yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle ja integroidaan kahdesti muuttujan x suhteen:

$$\begin{aligned} y''(x) - \cos(x) = 3 &\Leftrightarrow y''(x) = \cos(x) + 3 \\ &\Leftrightarrow y'(x) = \int (\cos(x) + 3)\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow y'(x) = \sin(x) + 3x + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(x) = \int (\sin(x) + 3x + c_1)\,\mathrm{d}x,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(x) = -\cos(x) + \frac{3x^2}{2} + c_1 x + c_2,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

joka on ratkaisu kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Alkuarvotehtävän $y(0) = 1 = y'(0)$ ratkaisu määritetään sijoittamalla alkuarvot funktioiden y ja y' lausekkeisiin ja lasketaan näiden avulla arvot vakioille c_1 ja c_2. Tutkitaan ensiksi alkuarvoa $y'(0) = 1$, jolloin

$$\begin{aligned} &y'(x) = \sin(x) + 3x + c_1 \\ &\Rightarrow 1 = y'(0) = \sin(0) + 3 \cdot 0 + c_1 = c_1 \text{ eli } c_1 = 1. \end{aligned}$$

Selvitetään vielä c_2 alkuarvon $y(0) = 1$ avulla. Koska nyt $c_1 = 1$, niin saadaan

$$1 = y(0) = -\cos(0) + \frac{3 \cdot 0^2}{2} + 1 \cdot 0 + c_2 = -1 + c_2 \text{ eli } c_2 = 2.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y(x) = x + 2 + \frac{3x^2}{2} - \cos(x).$$

Yleisempi tapa: HY:n ratkaisu + EHY:n yksittäisratkaisu

Seuraava ratkaisutapa soveltuu yleisten lineaaristen ja epähomogeenisten differentiaaliyhtälöiden käsittelyyn.

DY:n yleinen ratkaisu saadaan ratkaisemalla ensin homogeenisen yhtälön (tässä $y''(x) = 0$) yleinen ratkaisu y_h ja etsimällä *jokin* yksittäisratkaisu y_0, joka toteuttaa alkuperäisen yhtälön $y_0''(x) - \cos(x) + 3$. Tällöin lineaarisen differentiaaliyhtälön $y''(x) - \cos(x) + 3$ kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x).$$

Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö $y''(x) = 0$. Jälleen voidaan integroida yhtälöä kahdesti muuttujan x suhteen (jolloin saadaan $y(x) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$). Toisen asteen vakiokertoiminen ja lineaarinen differentiaaliyhtälö voidaan kuitenkin ratkaista yleisemmin tarkastelemalla sen *karakteristista yhtälöä*. Karakteristinen yhtälö saadaan sijoittamalla yhtälöön muotoa $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ oleva yrite, jolloin

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Koska aina $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, johtaa tämä karakteristiseen yhtälöön $\lambda^2 = 0$, jolla on kaksoisjuuri $\lambda = \pm 0 = 0$.

Näin ollen toisen asteen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan ratkaisukaavasta [Alestalo, s. 195(ii)]

$$y_h(x) = c_1 x \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda x} \overset{\lambda=0}{=} c_1 x \mathrm{e}^{0 \cdot x} + c_2 \mathrm{e}^{0 \cdot x} = c_1 x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Epähomogeeninen osa saadaan ratkaistua tekemällä yrite alkuperäiseen yhtälöön $y''(x) = 3 + \cos(x)$. Käytetään yritettä $y_0(x) = A\cos(x) + Bx^2$, jossa $A, B \in \mathbb{R}$ määräämättömiä kertoimia, jolloin saadaan

$$y_0''(x) = 3 + \cos(x) \Leftrightarrow 2B - A\cos(x) = 3 + \cos(x).$$

Molempien puolien kertomien tulee olla yhtäsuuret, jolloin saadaan

$$\begin{cases} -A = 1, \\ 2B = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Täten yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle on

$$y(x) = -\cos(x) + \frac{3x^2}{2} + c_1 x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu saadaan kuten yllä eli määrittämällä kertoimien c_1 ja c_2 arvot yleisen ratkaisun avulla yhtälöistä $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 1$, jolloin alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan samoin kuin yllä

$$y(x) = x + 2 + \frac{3x^2}{2} - \cos(x).$$