Tehtävä 3

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy - 2y + x - 2.$

Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Harjoituksen vuoksi seuraavassa esitellään kaksi mahdollista ratkaisutapaa.

Tapa 1: 1. kertaluvun lineaarisen DY:n ratkaisumenetelmä

Aloitetaan siirtämällä y-termit vasemmalle puolelle

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y - xy = x - 2 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (2-x)y = x - 2. \end{aligned}$$

Merkitään $p(x) = 2 - x$. Sen integraalifunktio on

$$P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Kerrotaan differentiaaliyhtälöä puolittain termillä $\mathrm{e}^{P(x)}$, jolloin saadaan

$$\mathrm{e}^{P(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (2-x)\mathrm{e}^{P(x)}y(x) = (x-2)\mathrm{e}^{P(x)}.$$

Yhtälön vasen puoli on nyt täsmälleen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{P(x)}y(x))$, mikä nähdään tulon derivointisäännöllä:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{P(x)}y(x)) = \mathrm{e}^{P(x)}y'(x) + P'(x)\mathrm{e}^{P(x)}y = \mathrm{e}^{P(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (2-x)\mathrm{e}^{P(x)}y(x).$$

Näin ollen yhtälö on saatettu muotoon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{P(x)}y) = (x-2)\mathrm{e}^{P(x)}.$$

Integroimalla yhtälöä puolittain saadaan

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{P(x)}y = \int (x-2)\mathrm{e}^{P(x)}\,\mathrm{d}x + C = -\int (2-x)\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + C,\ C \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{P(x)}y = -\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu saadaan jakamalla puolittain termillä $\mathrm{e}^{P(x)}$, jossa $P(x) = 2x - \frac{x^2}{2}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}}} + \frac{C}{\mathrm{e}^{2x-\frac{x^2}{2}}},\ C \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y(x) &= C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x} - 1,\ C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

joka on ratkaisu kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tapa 2: separointi

Havaitsemalla, että

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy - 2y + x - 2 = y(x-2) + (x-2) = (y+1)(x-2),$$

on kyseessä selvästikin separoituva differentiaaliyhtälö. Poistamalla tarkastelusta triviaaliratkaisu $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$, saadaan separoimalla

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)(x-2) &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = (x-2)\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int (x-2)\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 2x + C,\ C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |y+1| = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x+C},\ C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y+1 = \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x},\ C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y = D\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x} - 1, \end{aligned}$$

jossa uusi vakio $D = \pm\mathrm{e}^{C}$. Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa triviaaliratkaisua $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = D\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x} - 1,\ D \in \mathbb{R},$$

joka on ratkaisu kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Viitteet

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1*. Aalto-yliopisto, luentokalvot, 2016.
`https://mycourses.aalto.fi/mod/resource/view.php?id=135608`

MS-A0105 viikko 5 loppuviikon kotitehtävien malliratkaisut

13/14.10.2016

Tehtävä 4

$y - 2xy - x^2 + x^2y' = 0.$

Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Yhtälö voidaan kirjoittaa normaalimuodossa jakamalla puolittain termin y' kertoimella, jolloin saadaan

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1,$$

kun $x < 0$ tai $x > 0$.

Merkitään $p(x) = \frac{1-2x}{x^2}$, jonka (eräs) integraalifunktio on

$$P(x) = \int \frac{1-2x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| = -\frac{1}{x} - \ln(x^2).$$

Kerrotaan differentiaaliyhtälöä puolittain termillä $\mathrm{e}^{P(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-\ln(x^2)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$, jolloin alueissa $x < 0$ tai $x > 0$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}y &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}y\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}. \end{aligned}$$

Integroimalla yhtälöä puolittain saadaan

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}y = \int \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x + C = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Nyt jakamalla yhtälö puolittain termillä $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ saadaan

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}} + \frac{C}{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}} = C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}x^2 + x^2.$$

Tutkitaan vielä ratkaisun määrittelyaluetta. Vakio C ei vaikuta määrittelyalueeseen ja monomi x^2 on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Termistä $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ huomataan, että kun $x \to 0+$ niin $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, ja vastaavasti kun $x \to 0-$, niin $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to -\infty$. Yhtälön ratkaisu on siis määritelty, kun $x < 0$ tai $x > 0$.

Tehtävä 5

$y' = y^2(y-1)^2$.

Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun autonominen DY (eli DY:ssä ei esiinny muuttujaa x vapaana), jonka voi aina ratkaista separoimalla. Yhtälöllä on triviaaliratkaisut $y(x) = 0$ ja $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jotka poistetaan tarkastelusta. Tällöin separoimalla saadaan

$$\begin{aligned} y' = y^2(y-1)^2 &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(y-1)^2} = \int 1 \, \mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(y-1)^2} = x + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hajotetaan rationaalitermi osamurtoihin etsimällä osamurtohajotelmaa, joka on muotoa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y^2(y-1)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{(y-1)^2} \\ &\Leftrightarrow 1 = A(y^3 - 2y^2 + y) + B(y^2 - 2y + 1) + C(y^3 - y^2) + Dy^2 \\ &\Leftrightarrow 1 = y^3(A + C) + y^2(-2A + B - C + D) + y(A - 2B) + B. \end{aligned}$$

Jotta tämä yhtälö toteutuu, on y-termien kertoimet asetettava yhtäsuureksi kuin 0 ja vakio-osan tulee olla yhtäsuuri kuin 1. Saadaan

$B = 1$,
josta seuraa, että $0 = A - 2B = A - 2$ eli $A = 2$,
josta seuraa, että $0 = A + C = 2 + C$ eli $C = -2$,
josta seuraa, että $0 = -2A + B - C + D = -4 + 1 + 2 + D = -1 + D$ eli $D = 1$.

Tämän nojalla

$$
\begin{aligned}
y' = y^2(y-1)^2 &\Leftrightarrow \int \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} \right) \mathrm{d}y = x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 2\ln|y| - \frac{1}{y} - 2\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} = x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)^2 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}}_{=:H(y)} = x + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Funktio $H(y)$ on alueissa $y < 0$, $0 < y < 1$ tai $y > 1$ jatkuva ja aidosti kasvava, sillä $H'(y) = \frac{1}{y^2(y-1)^2} > 0$. Erityisesti se on näissä alueissa kääntyvä, joten differentiaaliyhtälön ratkaisun implisiittinen muoto on

$$H(y) = x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisuparveen kuuluvat luonnollisesti myös triviaaliratkaisut $y(x) = 0$ sekä $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Huomaa, että kunhan vakiolle C on kiinnitetty jokin arvo, niin jokaista muuttujan x arvoa kohti voidaan ratkaista vastaava arvo $y = y(x)$ esimerkiksi Newtonin menetelmällä.

Kvalitatiivinen analyysi

Koska kyseessä on autonominen yhtälö, voidaan ratkaisuparven käytöksestä sanoa hieman enemmän. Tasapainoratkaisuiden $y \equiv 0$ ja $y \equiv 1$ ulkopuolella DY:n ratkaisuille pätee

$$y' = y^2(y-1)^2 > 0, \quad \text{kun } y<0,\ 0<y<1 \text{ tai } y>1.$$

Erityisesti epätriviaalit ratkaisut ovat aidosti kasvavia.

Funktiolla H on kaksi singulariteettia, joissa

$$\lim_{y\to 0-} H(y) = +\infty, \quad \lim_{y\to 0+} H(y) = -\infty, \quad \lim_{y\to 1-} H(y) = +\infty \text{ ja } \lim_{y\to 1+} H(y) = -\infty.$$

Ratkaisuparven alkiot käyttäytyvät siis rajalla kuten

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{jos } y>1 \\ 1, & \text{jos } 0<y<1 \text{ tai } y\equiv 1 \\ 0, & \text{jos } y<0 \text{ tai } y\equiv 0 \end{cases}$$

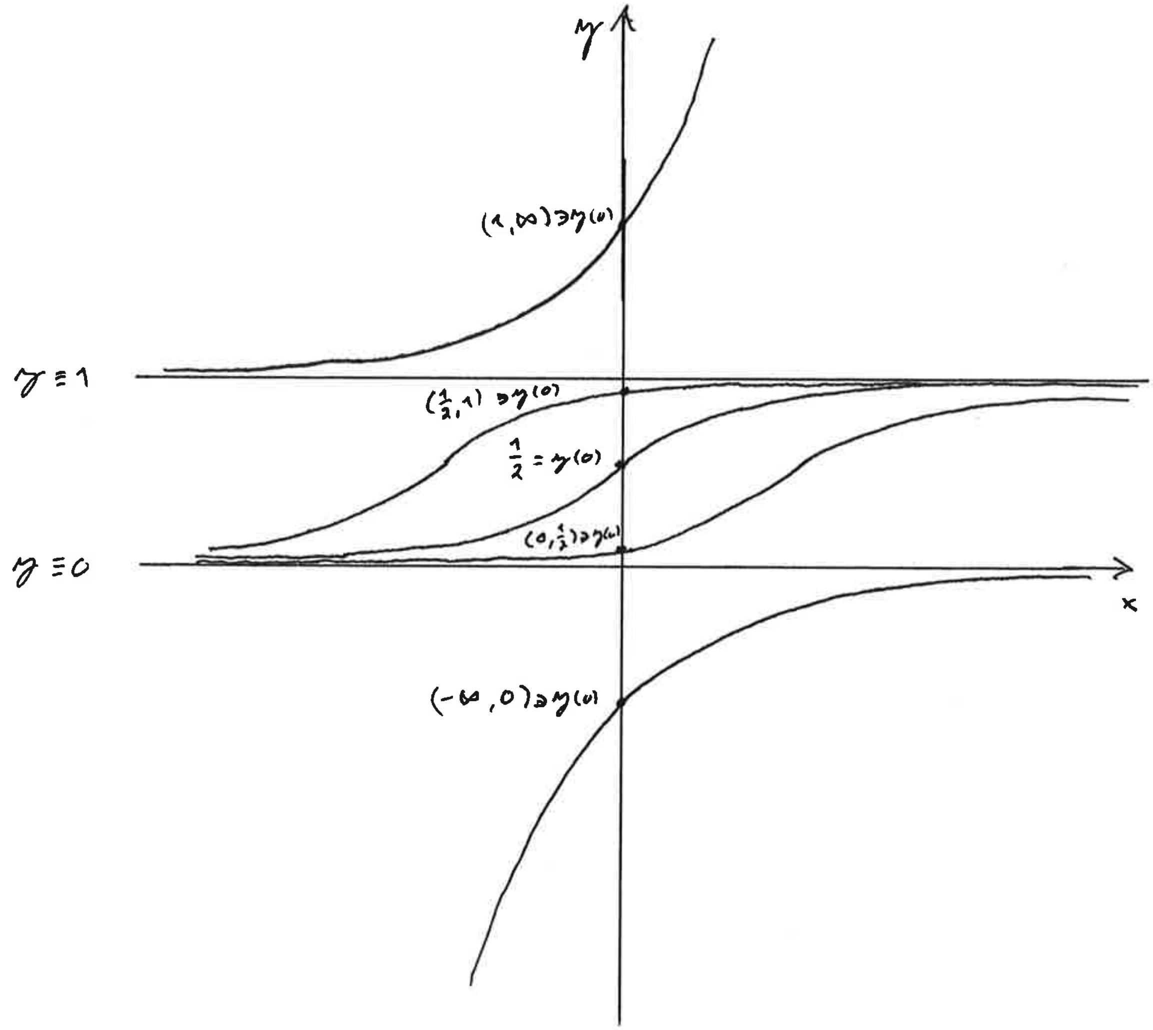
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } y>1 \text{ tai } y\equiv 1 \\ 0, & \text{jos } 0<y<1 \text{ tai } y\equiv 0 \\ -\infty, & \text{jos } y<0. \end{cases}$$

Ratkaisun toisen kertaluvun derivaatta on

$$y'' = 2yy'(y-1)^2 + 2y^2y'(y-1) = \underbrace{2y'}_{>0} \cdot y(y-1)(2y-1),$$

joten tasapainoratkaisuiden ulkopuolelle ratkaisukäyrän kaarevuussuunta muuttuu kohdassa $y = \frac{1}{2}$.

Riippuen valitusta alkuarvosta (esimerkiksi origossa), ratkaisut käyttäytyvät kuten alla on esitetty.


y
(1,∞)∋y(0)
y≡1
(1/2,1)∋y(0)
1/2 = y(0)
(0,1/2)∋y(0)
y≡0
x
(-∞,0)∋y(0)