Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (MS-A0105), syksy 2016
Alkuviikko 6, tuntitehtävien malliratkaisut

Eksaktit yhtälöt

DY muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, jossa $M, N\colon D \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$, on *eksakti*, jos löytyy sellainen jatkuvasti derivoituva potentiaali (integraalifunktio) $F\colon D \to \mathbb{R}$, että

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in D.$$

Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat yhtälön $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, implisiittisiä ratkaisuja.

Nk. *eksaktisuuslause* takaa, että kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva potentiaali $F\colon D \to \mathbb{R}$ on olemassa yhdesti yhtenäisessä alueessa $D \subset \mathbb{R}$ (erityisesti silloin kun D on reiätön ja suorakaiteen muotoinen alue), mikäli alueessa D jatkuvasti derivoituville funktioille M ja N pätee

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in D.$$

Kääntäen, potentiaalia F ei ole olemassa, mikäli yllä oleva ehto ei toteudu jatkuvasti derivoituville funktioille M ja N yhdesti yhtenäisessä alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

Muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ oleva yhtälö ei yleensä ole eksakti, mutta sille voi yrittää hakea integroivaa tekijää $(x,y) \mapsto \mu(x,y)$ siten, että muunnettu yhtälö $\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$ on eksakti. Sopivan integroivan tekijän voi löytää kokeilemalla, mutta yleisesti sellaisen löytäminen voi olla haastavaa. Yksi tapa, jolla voi yrittää hakea integroivaa tekijää perustuu yllä esitettyyn eksaktisuuslauseeseen vaatimalla, että

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)) \\
\Leftrightarrow\ & M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right).
\end{aligned}$$

ODY:iden ratkaisemiseen emme tällä kurssilla mene, mutta tehtävä yksinkertaistuu merkittävästi, mikäli yhtälölle löytyy integroiva tekijä, joka riippuu vain jommasta kummasta muuttujasta x tai y. Tämä ehto on helppo tarkistaa sillä integroiva tekijä μ riippuu esimerkiksi vain muuttujasta x, jos termi

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

on mahdollista sieventää sellaiseen muotoon, jossa y ei esiinny. Tällöin yllä oleva ODY voidaan muuttaa tavalliseksi DY:ksi

$$-N(x,y)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\mu(x)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

eli voidaan ratkaista μ DY:stä

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right). \tag{1}$$

Päättely on vastaavanlainen, mikäli μ riippuu vain muuttujasta y sillä muuttujien x ja y roolit vain vaihdetaan päättelyssä päikkäin. Toisin sanoen, jos

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

on pelkästään y:n funktio, niin integroiva tekijä $y\mapsto\mu(y)$ voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right).$$

1. Tarkasteltavana on DY $x^2y'-3xy-2y^2=0$. Poistetaan aluksi tarkastelusta triviaaliratkaisu $y\equiv 0$ ja suoritetaan muuttujanvaihto $z=\frac{y}{x}$, joka tuottaa $y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xz)=z+xz'$. Tehtävänannon DY voidaan alueissa $x\gtrless 0$ saattaa separoituvaan muotoon, jonka ratkaisu voidaan määrittää ratkaisumenetelmällä:

$$\begin{aligned}
x^2y'-3xy-2y^2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(z+xz')-3x^2z-2x^2z^2=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2z+x^3z'-3x^2z-2x^2z^2=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^3z'=2x^2z+2x^2z^2\\
&\Leftrightarrow \quad x^3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x^2(z+z^2) \qquad (\text{triviaaliratkaisu } z\equiv -1)\\
&\overset{z\not\equiv -1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)}=\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)}=\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Huomioimalla, että pätee $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$,[†] saadaan edellisestä

$$\begin{aligned}
x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|z| - \ln|z+1| = 2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| = \ln x^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z}{z+1}\right| = \mathrm{e}^{C+\ln x^2},\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{z+1} = Dx^2,\ D = \pm e^C \\
&\Leftrightarrow \quad z = Dx^2z + Dx^2 \\
&\Leftrightarrow \quad z(1 - Dx^2) = Dx^2 \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{Dx^2}{1 - Dx^2} \\
&\overset{z=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} \quad y = \frac{Dx^3}{1 - Dx^2},
\end{aligned}$$

joka on ratkaisu, kun $D = \pm\mathrm{e}^C$, $C \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa triviaaliratkaisua $y \equiv 0$. Havaitaan lisäksi, että ratkaisu on mahdollista jatkaa origoon. Ratkaisun lausekkeen nimittäjällä on nollakohdat $1 - Dx^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{D}}$, jos $D > 0$. Ratkaisun eräässä välivaiheessa törmättiin triviaaliratkaisuun $z \equiv 1$, joka vastaa funktiota $y = -x$. Näin ollen DY:lle löydettiin ratkaisut

$$y = -x \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad y = \frac{Dx^3}{1 - Dx^2},\ D \in \mathbb{R},$$

jossa jälkimmäinen lauseke on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jos $D \leq 0$, ja alueissa $x < -\frac{1}{\sqrt{D}}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{D}}$ tai $x > \frac{1}{\sqrt{D}}$, jos $D > 0$.

2. (a) Merkitään differentiaaliyhtälössä $2x+1+2xy+(x^2+4y^3)y' = 0$ funktioita

$$M(x,y) = 2x + 1 + 2xy \quad \text{ja} \quad N(x,y) = x^2 + 4y^3.$$

Haetaan potentiaalille lauseketta integroimalla funktiota M muuttujan x suhteen:

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (2x + 1 + 2xy)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + x^2y + f(y),$$

[†] Osamurtohajotelman voi löytää esimerkiksi seuraavalla tavalla: etsitään ehdon $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$ toteuttavat määräämättömät kertoimet $A, B \in \mathbb{R}$, ja tästä pyörittelemällä saadaan kriteeri $1 = A(z+1) + Bz = (A+B)z + A$, jonka selvästikin toteuttavat $A = 1$ ja $B = -1$.

jossa $f = f(y)$ on jokin muuttujasta y mahdollisesti riippuva termi. Vastaavasti integroimalla funktiota N muuttujan y suhteen saadaan

$$\int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (x^2 + 4y^3)\,\mathrm{d}y = x^2y + y^4 + g(x),$$

jossa $g = g(x)$ on jokin muuttujasta x mahdollisesti riippuva termi. Selvästikin asettamalla $f(y) = y^4$ ja $g(x) = x^2 + x$ saadaan potentiaalille lauseke

$$F(x,y) = x^2 + x + x^2y + y^4 \ \text{(+vakio)},$$

joten tarkasteltava yhtälö on eksakti. Erityisesti differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan implisiittimuodossa

$$x^2 + x + x^2y + y^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vakion lisääminen integraalifunktion lausekkeeseen ei muuta mitään, sillä sen voi suoraan sisällyttää yleisen ratkaisun vakioon C.

(b) Tarkasteltavana on yhtälö

$$2 + \frac{1}{x} + 2y + (x + 4\frac{y^3}{x})y' = 0, \ x \gtrless 0.$$

Kertomalla yhtälöä puolittain integroivalla tekijällä $\mu(x) = x$ saadaan täsmälleen a-kohdan DY

$$2x + 1 + 2xy + (x^2 + 4y^3)y' = 0, \ x \gtrless 0,$$

joka osoitettiin eksaktiksi. Ratkaisut ovat siis implisiittimuodossa

$$x^2 + x + x^2y + y^4 = C, \ C \in \mathbb{R}, \ \text{kun } x \gtrless 0.$$

Tehtävänannon DY ei ole määritelty origossa, joten tämä piste on poistettava ratkaisuparven määrittelyalueesta. Huomioi kuitenkin, että b-kohdan ratkaisut on mahdollista jatkaa origoon.

Huomio. Tässä tehtävässä integroiva tekijä $\mu(x) = x$ on helppo päätellä vertailemalla a- ja b-kohdan yhtälöitä keskenään sillä a-kohdan yhtälö osoitettiin eksaktiksi. Integroivan tekijän voi kuitenkin myös halutessaan määrittää eksaktisuuslauseeseen vedoten asettamalla b-kohdan DY:ssä

$$M(x,y) = 2 + \frac{1}{x} + 2y \quad \text{ja} \quad N(x,y) = x + 4\frac{y^3}{x},$$

jolloin

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 1 - 4\frac{y^3}{x^2}$$

ja erityisesti

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{1+4\frac{y^3}{x^2}}{x+\frac{4y^3}{x}}=\frac{1}{x}\frac{\cancel{1+4\frac{y^3}{x^2}}}{\cancel{1+\frac{4y^3}{x^2}}}=\frac{1}{x},\quad x\gtrless 0,$$

joka riippuu vain muuttujasta x. Sijoitetaan termit DY:öön (1), jolloin separoimalla saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&\Leftrightarrow\ln|\mu|=\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mu=Dx,\ D=\pm\mathrm{e}^C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Erityisesti vakion arvo $D=1$ vastaa b-kohdassa käytettyä integroivaa tekijää $\mu(x)=x$. (Huomaa, että arvon $D=0$ liittäminen yleiseen ratkaisuun ei ole tässä tapauksessa mahdollista! Se ei olisi myöskään mielekästä, sillä yhtälön kertominen puolittain nollalla ei ole sallittua.)

3. Tarkastellaan yhtälöä $xy'-3y=x^5$, kun $x>0$.

(a) Kirjoitetaan yhtälö normaalimuotoon jakamalla puolittain termillä x:

$$xy'-3y=x^5\quad\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\quad y'-\frac{3}{x}y=x^4.\tag{2}$$

(b) Integroiva tekijä μ löydetään asettamalla

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int-\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-3\ln x}=\mathrm{e}^{\ln x^{-3}}=x^{-3}=\frac{1}{x^3},\quad x>0.\quad\text{(integroimisvakio nolla)}$$

(c) Kertomalla yhtälöä (2) integroivalla tekijällä saadaan DY haluttuun muotoon

$$\frac{1}{x^3}y'-\frac{3}{x^4}y=x\quad\overset{\substack{\text{tulon}\\\text{derivointi}}}{\Leftrightarrow}\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^3}y\right)=x.$$

(d) Integroimalla yhtälöä puolittain muuttujan x suhteen saadaan DY:n ratkaisuksi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^3}y=\frac{1}{2}x^2+C,\ C\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x^5+Cx^3,\ C\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

kun $x>0$.

(e) Tarkastellaan normaalimuotoista yhtälöä

$$y'+p(x)y=q(x)\quad\Leftrightarrow\quad p(x)y-q(x)+y'=0,$$

jossa määritellään $M(x,y) = p(x)y - q(x)$ ja $N(x,y) = 1$. Tällöin termi

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{1}(p(x) - 0) = p(x)$$

riippuu vain muuttujasta x ja integroiva tekijä saadaan ratkaisemalla separoituva DY (kts. kohta (1))

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = p(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = p(x)\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \int p(x)\,\mathrm{d}x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|\mu| = \int p(x)\,\mathrm{d}x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad |\mu| = \mathrm{e}^C \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right),\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \mu = D \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right),\ D = \pm\mathrm{e}^C,
\end{aligned}$$

jossa vakio $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Huomaa, että näin laskettu integroiva tekijä vastaa täsmälleen 1. kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön integroivaa tekijää

$$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)},\ \text{missä } u(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Potentiaalin määrittämiseksi lasketaan muunnetulle systeemille $\widetilde{M}(x,y) + \widetilde{N}(x,y)y' = 0$, jossa $\widetilde{M}(x,y) = \mu(x)M(x,y)$ ja $\widetilde{N}(x,y) = \mu(x)N(x,y)$, integraalit

$$\begin{aligned}
\int \widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \mu(x)M(x,y)\,\mathrm{d}x &= D\int \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)(p(x)y - q(x))\,\mathrm{d}x \\
&= D\exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)y - D\int \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)q(x)\,\mathrm{d}x + f(y) \\
&= \mu(x)y - \int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x + f(y)
\end{aligned}$$

ja

$$\int \widetilde{N}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \mu(x)\,\mathrm{d}y = \mu(x)y + g(x).$$

Potentiaali F saadaan asettamalla $f(y) = 0$ ja $g(x) = -\int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x$, jolloin

$$F(x,y) = \mu(x)y - \int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

ja sen tasa-arvokäyrät ovat

$$\mu(x)y - \int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Huomaa, että näin menettelemällä päädyttiin täsmälleen 1. kertaluvun lineaarisen DY:n ratkaisukaavaan!

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (MS-A0105), syksy 2016
Alkuviikko 6, kotitehtävien malliratkaisut

4. *Ratkaisutapa 1.* Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x$. Suoritetaan muuttujanvaihto $z = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = z + xz'$ ja saadaan

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y' = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x \quad \overset{x\gtrless 0}{\Leftrightarrow} \quad \cancel{xz\sin z} + x^2z'\sin z = \cancel{xz\sin z} + x.$$

Tämä yhtälö on selvästikin separoituva, joten alueissa $x \gtrless 0$ jako puolittain termillä x^2 tuottaa

$$\begin{aligned}
z'\sin z = \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin z\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \sin z\,\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad -\cos z = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad (1) \\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\operatorname{arc}\cos(-\ln|x| + D) + 2\pi n,\ D = -C \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \\
&\qquad\qquad (\text{cos parillinen}) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm x\operatorname{arc}\cos(D - \ln|x|) + 2\pi nx,\ D \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

jonka määrittelyalue on $|D - \ln|x|| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \ln|x| - D \le 1 \Leftrightarrow D - 1 \le \ln|x| \le D + 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{D-1} \le |x| \le \mathrm{e}^{D+1}$ eli $\mathrm{e}^{D-1} \le x \le \mathrm{e}^{D+1}$ tai $-\mathrm{e}^{D+1} \le x \le -\mathrm{e}^{D-1}$.

Ratkaisutapa 2. Merkitään DY:ssä $M(x,y) = -y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$ ja $N(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Tutkitaan eksaktisuutta: koska

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right),$$

niin yleisesti $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, joten DY ei ole eksakti. Havaitaan kuitenkin, että termi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}\right) &= \frac{-\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sin\left(\frac{y}{x}\right)} \\
&= \frac{-2\cancel{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}}{x\cancel{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}} = -\frac{2}{x}
\end{aligned}$$

ei riipu muuttujasta y, joten integroiva tekijä $x \mapsto \mu(x)$ on alueissa $x \gtrless 0$

mahdollista ratkaista separoituvasta DY:stä [kts. luentomuistiinpanot]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{D}{x^2},\ D = \pm \mathrm{e}^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \gtrless 0.
\end{aligned}$$

Merkitään integroivalla tekijällä $\mu(x) = 1/x^2$ kerrotussa DY:ssä $\widetilde{M}(x,y) = \mu(x)M(x,y)$ ja $\widetilde{N}(x,y) = \mu(x)N(x,y)$. Potentiaalin F etsimiseksi lasketaan

$$\int \widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{y}{x^2}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| + f(y),$$

jossa $f = f(y)$ on jokin muuttujasta y mahdollisesti riippuva termi, ja

$$\int \widetilde{N}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) + g(x),$$

jossa $g = g(x)$ on jokin muuttujasta x mahdollisesti riippuva termi. Asettamalla $g(x) = -\ln|x|$ ja $f(y) = 0$ saadaan potentiaalille lauseke

$$F(x,y) = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x|,$$

joten DY:n ratkaisut saadaan alueissa $x \gtrless 0$ implisiittimuodossa yhtälöstä

$$-\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Huomaa, että etenemällä kuten ratkaisutavassa 1 kohdan (1) jälkeen voi ratkaisulle johtaa eksplisiittisen lausekkeen

$$y = \pm x \arccos(-C - \ln|x|) + 2\pi n x,\ C \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},$$

jonka määrittelyalue on $\mathrm{e}^{-C-1} \le |x| \le \mathrm{e}^{-C+1}$. (Huomaa, että ratkaisutavassa 1 tehty valinta $D = -C$ ei muuta ratkaisua!)

5. Ratkaistava DY $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$. Suoritetaan muuttujanvaihto $z = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = z + xz'$. Tehtävän neliöjuuritermi on kiusallinen, sillä jotta yhtälö olisi mahdollista saattaa separoituvaan muotoon, on tapaukset $x > 0$ sekä $x < 0$ käsiteltävä erikseen.†

† Huomioithan, että jos $x > 0$, niin $x = \sqrt{x^2}$, mutta jos $x < 0$, niin $x = -\sqrt{x^2}$.