mahdollista ratkaista separoituvasta DY:stä [kts. luentomuistiinpanot]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{D}{x^2},\ D = \pm \mathrm{e}^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \gtrless 0.
\end{aligned}
$$

Merkitään integroivalla tekijällä $\mu(x) = 1/x^2$ kerrotussa DY:ssä $\widetilde{M}(x,y) = \mu(x)M(x,y)$ ja $\widetilde{N}(x,y) = \mu(x)N(x,y)$. Potentiaalin F etsimiseksi lasketaan

$$\int \widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{y}{x^2}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| + f(y),$$

jossa $f = f(y)$ on jokin muuttujasta y mahdollisesti riippuva termi, ja

$$\int \widetilde{N}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) + g(x),$$

jossa $g = g(x)$ on jokin muuttujasta x mahdollisesti riippuva termi. Asettamalla $g(x) = -\ln|x|$ ja $f(y) = 0$ saadaan potentiaalille lauseke

$$F(x,y) = -\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x|,$$

joten DY:n ratkaisut saadaan alueissa $x \gtrless 0$ implisiittimuodossa yhtälöstä

$$-\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Huomaa, että etenemällä kuten ratkaisutavassa 1 kohdan (1) jälkeen voi ratkaisulle johtaa eksplisiittisen lausekkeen

$$y = \pm x \arccos(-C - \ln|x|) + 2\pi n x,\ C \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},$$

jonka määrittelyalue on $\mathrm{e}^{-C-1} \leq |x| \leq \mathrm{e}^{-C+1}$. (Huomaa, että ratkaisutavassa 1 tehty valinta $D = -C$ ei muuta ratkaisua!)

5. Ratkaistava DY $xy' = \sqrt{x^2+y^2}$. Suoritetaan muuttujanvaihto $z = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = z + xz'$. Tehtävän neliöjuuritermi on kiusallinen, sillä jotta yhtälö olisi mahdollista saattaa separoituvaan muotoon, on tapaukset $x > 0$ sekä $x < 0$ käsiteltävä erikseen.[†]

[†]Huomioithan, että jos $x > 0$, niin $x = \sqrt{x^2}$, mutta jos $x < 0$, niin $x = -\sqrt{x^2}$.

$\boxed{1^\circ\ \textit{Tapaus}\ x > 0.}$ DY voidaan nyt separoida:

$$\begin{aligned} xy' = \sqrt{x^2+y^2} \quad &\Leftrightarrow \quad y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad z + xz' = \sqrt{1+z^2} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}-z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vasemmanpuolista integraalia on helpompi käsitellä laventamalla rationaalitermi luvulla $\sqrt{1+z^2}+z$, jolloin saadaan

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}-z} = \int (\sqrt{1+z^2}+z)\,\mathrm{d}z = \int \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}z^2.$$

Suorittamalla jäljellä olevaan integraaliin muuttujanvaihto $z = \sinh w$, $\mathrm{d}z = \cosh w\,\mathrm{d}w$, saadaan

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z &= \int \sqrt{1+\sinh^2 w}\cosh w\,\mathrm{d}w = \int \cosh^2 w\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{4}\int (\mathrm{e}^{2w} + 2 + \mathrm{e}^{-2w})\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}w + \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{2w} - \mathrm{e}^{-2w}) \\ &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{4}\sinh(2w) = \frac{1}{2}\operatorname{ar\,sinh} z + \frac{1}{4}\sinh(2\operatorname{ar\,sinh} z). \end{aligned}$$

Koska $\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x$, niin erityisesti

$$\sinh(2\operatorname{ar\,sinh} z) = 2\sinh(\operatorname{ar\,sinh} z)\cosh(\operatorname{ar\,sinh} z) = 2z\cosh(\operatorname{ar\,sinh} z).$$

Toisaalta nyt $\cosh^2(\operatorname{ar\,sinh} z) = 1 + \sinh^2(\operatorname{ar\,sinh} z) = 1 + z^2$, joten hyperbolisen kosinin positiivisuudesta seuraa

$$\int \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\operatorname{ar\,sinh} z + \frac{1}{2}z\sqrt{1+z^2}. \tag{2}$$

Tiedot yhdistämällä ja palaamalla muuttujaan $y = xz$ saadaan ratkaisulle implisiittinen esitys

$$\frac{1}{2}\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{2x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R},\ \text{kun } x > 0.$$

$\boxed{2^\circ\ \textit{Tapaus}\ x < 0.}$ Edetään kuten aiemminkin eli DY voidaan nyt separoida muodossa

$$\begin{aligned} xy' = \sqrt{x^2+y^2} \quad &\Leftrightarrow \quad y' = -\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad z + xz' = -\sqrt{1+z^2} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}+z} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lavennetaan vasemmanpuolisen integraalin rationaalitermi luvulla $\sqrt{z+z^2}-z$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}+z} = \int (\sqrt{1+z^2}-z)\,\mathrm{d}z = \int \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}z^2 \\ \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\mathrm{ar\,sinh} z + \frac{1}{2}z\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2}z^2.\end{aligned}$$

Ratkaisu saadaan siis implisiittimuodossa

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{ar\,sinh}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{2x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C, & \text{jos } x > 0, \\ \frac{1}{2}\mathrm{ar\,sinh}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{2x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\ln|x| + C, & \text{jos } x < 0, \end{cases}$$

kun $C \in \mathbb{R}$.

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (MS-A0105), syksy 2016
Loppuviikko 6, tuntitehtävien malliratkaisut

1. Tarkastellaan yhtälöä $\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^{-x})y' = 0$. Merkitään $M(x,y) = \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x}$ ja $N(x,y) = \mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^{-x}$. Tarkistetaan, onko yhtälö eksakti laskemalla

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -2y\mathrm{e}^{-x}.$$

Koska nyt $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, niin eksaktisuuslauseen nojalla DY ei ole eksakti (kts. AV6 mallit). Haetaan siis DY:lle sopivaa integroivaa tekijää.

Tässä tapauksessa sopivan kandidaatin integroivaksi tekijäksi voi löytää kokeilemalla funktiota $\mu(x) = \mathrm{e}^x$ sillä tämä eliminoi sopivasti hankaluuksia aiheuttavan termin e^{-x} DY:stä, mutta ratkaistaan harjoituksen vuoksi integroiva tekijä teoriaan vedoten.

Ensinnäkin havaitaan, että koska termi

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^{-x}} = 1$$

ei riipu muuttujasta y, niin muuttujasta x riippuva integroiva tekijä $x \mapsto \mu(x)$ voidaan ratkaista separoimalla DY:stä

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \int \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|\mu| = x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \mu = D\mathrm{e}^x,\ D = \pm\mathrm{e}^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Erityisesti siis $\mu(x) = \mathrm{e}^x$ on DY:n integroiva tekijä ja muunnetuksi DY:ksi saadaan

$$\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^{-x})y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x+y} + 1 + (\mathrm{e}^{x+y} + 2y)y' = 0.$$

Merkitään $\widetilde{M}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + 1$ ja $\widetilde{N}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + 2y$. Haetaan potentiaalille F lauseketta integroimalla ensin funktiota $\widetilde{M}$ muuttujan x suhteen, jolloin saadaan

$$\int \widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^{x+y} + 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+y} + x + f(y),$$

jossa $f = f(y)$ on jokin muuttujasta y mahdollisesti riippuva termi. Vastaavasti

$$\int \widetilde{N}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (\mathrm{e}^{x+y} + 2y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{x+y} + y^2 + g(x),$$

jossa $g = g(x)$ on jokin muuttujasta x mahdollisesti riippuva termi. Asettamalla $f(y) = y^2$ ja $g(x) = x$ saadaan potentiaalille lauseke

$$F(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x + y^2 \ \text{(+vakio)}.$$

DY:n ratkaisut saadaan siis implisiittimuodossa

$$\mathrm{e}^{x+y} + x + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. *Ratkaisutapa 1.* Kyseessä on 1. kertaluvun lineaarinen DY, joten kirjoitetaan se normaalimuodossa

$$xy' = -3y + \frac{\sin x}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3},\ \text{kun } x \gtrless 0. \tag{1}$$

Havaitaan, että termin y kertoimella on *eräs* integraalifunktio

$$\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}(x^3), \qquad \text{(logaritmin päähaara)}$$

joten määritellään integroiva tekijä asettamalla

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{Log}(x^3)} = x^3,\ x \gtrless 0.$$

Kerrotaan yhtälöä (1) puolittain integroivalla tekijällä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
x^3y' + 3x^2y = \sin x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3y) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x^3y = \int \sin x\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad x^3y = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{C - \cos x}{x^3},\ C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

joka on ratkaisu alueissa $x \gtrless 0$.

Ratkaisutapa 2. Tarkastellaan aluksi homogeenista yhtälöä $xy' = -3y$. Tämä on selvästikin separoituva. Poistetaan tarkastelusta triviaaliratkaisu $y \equiv 0$, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned}
xy' = -3y \quad &\overset{x \gtrless 0}{\Leftrightarrow} \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{3\,\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = -3\,\mathrm{Log}\,x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{D}{x^3},\ D = \mathrm{e}^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa triviaaliratkaisua, joten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = \frac{D}{x^3},\ D \in \mathbb{R},\ x \gtrless 0.$$

Vielä on ratkaistava epähomogeeninen DY $xy' = -3y + \frac{\sin x}{x^2}$. Koska kyseessä on lineaarinen DY, niin ratkaisu saadaan lisäämällä homogeenisen yhtälön ratkaisuun jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu. Kokeillaan yksittäisratkaisun etsimisessä vakion variointia eli korvataan vakio D muuttujasta x riippuvalla termillä $D = D(x)$. Tällöin

$$y = \frac{D(x)}{x^3} \quad \text{ja} \quad y' = \frac{D'(x)}{x^3} - \frac{3D(x)}{x^4}.$$

Sijoitus alkuperäiseen yhtälöön tuottaa

$$\begin{aligned} xy' = -3y + \frac{\sin x}{x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{D'(x)}{x^2} - \cancel{\frac{3D(x)}{x^3}} = -\cancel{\frac{3D(x)}{x^3}} + \frac{\sin x}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad D'(x) = \sin x \qquad \text{(integroidaan puolittain)} \\ &\Leftrightarrow \quad D(x) = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Siispä differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$y = \frac{C - \cos x}{x^3},\ C \in \mathbb{R},\ x \gtrless 0.$$