

Havaitaan, että vakion arvo $D = 0$ vastaa triviaaliratkaisua, joten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = \frac{D}{x^3}, \quad D \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0.$$

Vielä on ratkaistava epähomogeeninen DY $xy' = -3y + \frac{\sin x}{x^2}$. Koska kyseessä on lineaarinen DY, niin ratkaisu saadaan lisämällä homogeenisen yhtälön ratkaisuun jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu. Kokeillaan yksittäisratkaisun etsimisessä vakion variointia eli korvataan vakio D muuttujasta x riippuvalla termillä $D = D(x)$. Tällöin

$$y = \frac{D(x)}{x^3} \quad \text{ja} \quad y' = \frac{D'(x)}{x^3} - \frac{3D(x)}{x^4}.$$

Sijoitus alkuperäiseen yhtälöön tuottaa

$$\begin{aligned} xy' = -3y + \frac{\sin x}{x^2} &\Leftrightarrow \frac{D'(x)}{x^2} - \frac{3D(x)}{x^3} = -\frac{3D(x)}{x^3} + \frac{\sin x}{x^2} \\ &\Leftrightarrow D'(x) = \sin x \quad (\text{integroidaan puolittain}) \\ &\Leftrightarrow D(x) = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Siispä differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$y = \frac{C - \cos x}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0.$$

3. (a) Ratkaistava 2. kertaluvun lineaarinen ja vakiokertoiminen AAT

$$\begin{aligned} 2y'' + 8y' + 6y &= 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \\ \Leftrightarrow y'' + 4y' + 3y &= 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Karakteristinen yhtälö löydetään yritteellä $y = e^{\lambda x}$, λ vakio, jonka sijoitus DY:öön tuottaa

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 4\lambda + 3) \underbrace{e^{\lambda x}}_{\text{aina } \neq 0} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \quad (\text{karakteristinen yhtälö}) \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = -2 \pm 1. \end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat siis erisuuret reaaliset luvut $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = -1$, joten ratkaisukaava [Alestalo, s. 195(i)] antaa DY:n yleisen ratkaisun

$$y = Ce^{-3x} + De^{-x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Tehtävän alkuarvot määräävät vakioiden C ja D arvot. Derivoidaan yleisen ratkaisun kaavaa, jolloin saadaan

$$y' = -3Ce^{-3x} - De^{-x}$$

ja alkuehdot toteuttavat kertoimet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ce^{-3 \cdot 0} + De^{-0} = 2, \\ -3Ce^{-3 \cdot 0} - De^{-0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 2, \\ -3C - D = 0. \end{cases}$$

Summaamalla yhtälöt keskenään saadaan $-2C = 2$ eli $C = -1$, jonka sijoitus ylempään yhtälöön tuottaa $D = 3$. AAT:n ratkaisu on näin ollen

$$y = -e^{-3x} + 3e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Ratkaistava 2. kertaluvun lineaarinen ja vakio kertoiminen AAT

$$\begin{aligned} 2y'' + 12y' + 18y &= 0, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow y'' + 6y' + 9y &= 0, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Määritetään karakteristinen yhtälö yritteellä $y = e^{\lambda x}$, λ vakio, jonka sijoitus tehtävänannon DY:öön tuottaa

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 6\lambda + 9) \underbrace{e^{\lambda x}}_{\text{aina } \neq 0} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad (\text{karakteristinen yhtälö}) \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = -3. \quad (\text{kaksoisjuuri}) \end{aligned}$$

Kaksoisjuuren $\lambda = -3$ tapauksessa ratkaisukaava [Alestalo, s. 195(ii)] antaa DY:n yleiseksi ratkaisuksi

$$y = Cxe^{-3x} + De^{-3x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Tehtävän alkuarvot määräävät vakioiden C ja D arvot. Derivoidaan yleisen ratkaisun kaavaa, jolloin saadaan

$$y' = Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x} - 3De^{-3x}$$

ja alkuehdot toteuttavat kertoimet saadaan yhtälöparista

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot 0 \cdot e^{-3 \cdot 0} + De^{-3 \cdot 0} = 1, \\ Ce^{-3 \cdot 0} - 3C \cdot 0 \cdot e^{-3 \cdot 0} - 3De^{-3 \cdot 0} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} D = 1, \\ C - 3D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1, \\ C = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

AAT:n ratkaisu on siis

$$y = 3xe^{-3x} + e^{-3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kurssimateriaali

[Alestalo] Pekka Alestalo. *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1*. Aalto-yliopisto, luentokalvot, 2016.
<https://mycourses.aalto.fi/mod/resource/view.php?id=135608>

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (MS-A0105), syksy 2016
Loppuviikko 6, kotitehtävien malliratkaisut

4. (a) Etsittävä DY, jonka yleinen ratkaisu on $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Ratkaisun muoto on

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad (1)$$

jossa kaksoisjuuri $\lambda = 3$ on ratkaisu karakteristiselle yhtälölle $(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Kertoimet lukemalla havaitaan välittömästi, että annettu ratkaisu vastaa (kerroinvakiota vaille) DY:ä

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(b) Yleinen ratkaisu $y = c_1 + c_2 e^{-5x}$. Ratkaisun muoto on

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

jossa $\lambda_1 = 0$ sekä $\lambda_2 = -5$ saadaan karakteristisesta yhtälöstä $\lambda(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda = 0$. Kertoimet lukemalla havaitaan, että annettu ratkaisu vastaa (kerroinvakiota vaille) DY:ä

$$y'' + 5y' = 0.$$

(c) Yleinen ratkaisu $y = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$. Ratkaisun muoto on

$$y = c_1 e^{ax} \sin(bx) + c_2 e^{ax} \cos(bx), \quad (2)$$

jossa $\lambda = a \pm bi = 0 \pm 4i$ saadaan karakteristisesta yhtälöstä $(\lambda - 4i)(\lambda + 4i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 16 = 0$. Kertoimet lukemalla havaitaan, että annettu ratkaisu vastaa (kerroinvakiota vaille) DY:ä

$$y'' + 16y = 0.$$

(d) Yleinen ratkaisu $y = c_1 e^{-x} \sin 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x$. Ratkaisun muoto vastaa kohtaa (2), jossa $\lambda = a \pm bi = -1 \pm 2i$ saadaan karakteristisesta yhtälöstä $(\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (1 - 2i)\lambda + (1 + 2i)\lambda + (1 + 2i)(1 - 2i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Kertoimet lukemalla havaitaan, että annettu ratkaisu vastaa (kerroinvakiota vaille) DY:ä

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

(e) Yleinen ratkaisu $y = c_1 + c_2 x$ vastaa kohtaa (1), jossa kaksoisjuuri $\lambda = 0$ on ratkaisu karakteristiselle yhtälölle $\lambda^2 = 0$. Kertoimet lukemalla havaitaan, että annettu ratkaisu vastaa (kerroinvakiota vaille) DY:ä

$$y'' = 0.$$

5. Muista vastata Aalto-sähköpostiisi lähetettyyn palautekyselyyn 8.11. mennessä! Palautteen antamisesta saa 3 bonuspistettä. Jos et ole saanut linkkiä palautteen antamiseksi, ota yhteyttä pääassistenttiin.

Kiitos osallistumisesta ja hyvää loppusyksyä kaikille kurssin osallistujille!