MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Ratkaisut 1, tehtävät 1-10

Tehtävät 8-10 voi palauttaa perjantaihin 26.5. klo 23:59 saakka MyCourses-sivulle (esimerkiksi pdf-tiedostona tai kuvina). Tehtävien 8-10 malliratkaisut ilmestyvät sen jälkeen.

1. (a) i. $0, 3, 2, 5, 4$; ii. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}$; iii. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$.

   (b) Arvoilla $n \geq 1$: i. $a_n = 2^{n+1}$; ii. $a_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$; iii. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$.
   Huomaa, että muitakin sopivia kaavoja on.

2. (a) Suppenee ja $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$:

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   (b) Hajaantuu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\ln n = 0 + \infty = \infty.$$

   (c) Suppenee,

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 + \mathrm{e}^{-2n}\right) = 3 + \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-2n} = 3 + 0 = 3.$$

   (d) Suppenee: tämä on geometrinen jono, jonka kertoimelle pätee $|r| = 2/3 < 1$, joten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

   (e) Suppenee ja $\lim_{n\to\infty}\sin n/n = 0$:

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   (f) Suppenee ja $\lim_{n\to\infty} n\sin 1/n = 1$. Yksi tapa nähdä tämä, on tarkastella potenssisarjaa

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

   Seuraa

$$\begin{aligned} n\sin\frac{1}{n} &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{n^{-3}}{3!} + \frac{n^{-5}}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{n^{-2}}{3!} + \frac{n^{-4}}{5!} - \ldots \\ &= 1 - \mathcal{O}(n^{-2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

   Laskun opetus on, että $\sin x \approx x$ kun $|x| \ll 1$.

   (g) Hajaantuu: arvoilla $k \geq 1$ pätee $\cos\pi 2k = 1$ ja $\cos\pi(2k+1) = -1$. Siis

$$(\cos\pi n)_{n\geq 1} = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots).$$

(h) Suppenee ja $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)=1/2$:

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

3. (a) Olkoon uuden auton hinta $d_0=20000$, ja d_n sen jälleenmyyntihinta n käyttövuoden jälkeen. Jos auto menettää arvostaan 12% joka vuosi, ensimmäisen vuoden jälkeen auton hinta on
$$d_1=0,88d_0.$$
Toisen ja kolmannen vuoden jälkeen jälleenmyyntihinnat ovat
$$d_2=0,88d_1=0,88^2d_0;\quad d_3=0,88d_2=0,88^3d_0,$$
joten päätellään, että
$$d_n=0,88^nd_0.$$

(b) Ostohetkellä ei makseta huollosta, joten $r_0=0$. Ensimmäisen vuoden huolto maksaa $r_1=400$ ja huolto kallistuu 18% vuodessa, joten
$$r_2=1,18r_1=1,18\cdot 400=472;\quad r_3=1,18r_2=1,18^2r_1=556,96,$$
päätellään $r_n=1,18^{n-1}r_1$.

(c) $d_0-d_3+r_1+r_2+r_3=20000(1-0,88^3)+400(1+1,18+1,18^2)=7799,52$ (€).

(d) $d_2-d_5+r_3+r_4+r_5=20000(0,88^2-0,88^5)+400(1,18^2+1,18^3+1,18^4)\approx 6923,05$ (€).

4. (a) $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$.

(b) Käytä aluksi rekursiokaavaa $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$:
$$r^2=r\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=r\lim_{n\to\infty}\frac{f_n+f_{n-1}}{f_n}=r\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{f_n}{f_{n-1}}\right)^{-1}\right).$$
Olettaen, että $f_{n+1}/f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}r<\infty$, annetaan $n\to\infty$:
$$r^2=r\left(1+\frac{1}{r}\right)=r+1,$$
mikä on haluttu tulos. Ratkaisemalla tämä muuttujan r toisen asteen yhtälö saadaan
$$r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$
Koska oletettiin, että r on positiivinen, hylätään negatiivinen juuri ja saadaan $r\approx 1,618$, mikä sattuu olemaan *kultaisen leikkauksen* suhdeluku, jota usein merkitään kirjaimella φ.

(c) $a_n=Ar^n=Ar^{n-2}\cdot r^2=Ar^{n-2}(r+1)=Ar^{n-1}+Ar^{n-2}=a_{n-1}+a_{n-2}$.

(d) Yksinkertaistuksen vuoksi (?) kirjoitetaan Binet'n kaava (b)-kohdassa mainitun luvun φ avulla:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n - (1-\varphi)^n} = \frac{\varphi^n\left(\varphi - (1-\varphi)\left(\frac{1}{\varphi}-1\right)^n\right)}{\varphi^n\left(1-\left(\frac{1}{\varphi}-1\right)^n\right)} = \frac{\varphi - (1-\varphi)\left(\frac{1}{\varphi}-1\right)^n}{1-\left(\frac{1}{\varphi}-1\right)^n}.$$

Koska $|1/\varphi - 1| < 1$,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\varphi - (1-\varphi)\cdot 0}{1-0} = \varphi = r.$$

5. (a) $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n^2$, $n \geq 2$.
   (b) $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n$, $n \geq 2$.
   (c) Olkoon f_n Fibonaccin lukujonon n:s termi ja muistetaan edellisessä harjoituksessa ollut rekursiokaava. Tällöin $a_1 = 1$ ja

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \left(\frac{f_n}{f_{n-1}}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

6. Tässäkin tehtävässä on useita oikeita vastauksia.
   (a) $a_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$
   (b) $a_n = n$, $n \geq 1$
   (c) $\sum_{n=k}^{\infty} 0^n$ tai $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n$, $k \geq 0$.
   (d)

$$\sum_{n=0}^{1} 9^n = 10, \quad \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{\sqrt{37}-1}{2}\right)^n = 10.$$

   Yleisesti, ratkaise yhtälö

$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = 10$$

   jollakin $k > 1$.
   (e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 10,$$

   missä yleinen termi löydetään artkaisemalla yhtälö $1/(1-a) = 10$.

7. (a) i. Määritellään jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $S_1 = 1000$ on alkupääoma ja S_n on saldo välittömästi n:n talletuksen jälkeen. Tällöin S_n toteuttaa rekursiokaavan

$$S_1 = 1000, \quad S_{n+1} = 1000 + 1{,}05 S_n,\ n \geq 1.$$

Osoittautuu (voidaan tehdä induktiotodistus), että S_n on geometrinen summa

$$S_n = 1000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1,05^k = 1000 \cdot \frac{1-1,05^n}{1-1,05}, \quad n \geq 1.$$

Välittömästi 11. talletuksen jälkeen (jättämättä huomiotta aiempien vuosien pyöristykset), saldo on

$$S_{11} = 1000 \cdot \frac{1-1,05^{11}}{1-1,05} \approx 14206,79 \text{ (€)}.$$

ii. Odotettavasti,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1000 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 1,05^k = \infty,$$

koska tämä on geometrinen sarja suhdeluvulla $r = 1,05 > 1$.

(b) Edelleen, määritellään $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, missä S_n on jätteen määrä järvessä n:n päivän jälkeen. Lisäksi, olkoon S_0 jätteen määrä ennen operaatiota. Tällöin pätee rekursiokaava

$$S_n = 0,75(S_{n-1}+8),\ n \geq 1,$$

mikä voidaan (induktion perusteella) ilmaista geometrisena summana

$$\begin{aligned} S_n &= 0,75^n S_0 + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0,75^k = 0,75^n S_0 + 8 \cdot 0,75 \sum_{k=0}^{n-1} 0,75^k \\ &= 0,75^n S_0 + 8 \cdot \frac{0,75-0,75^{n+1}}{1-0,75},\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Tutkitaan asiaa "pitkässä juoksussa" antamalla $n \to \infty$. Koska $|0,75| < 1$, sarja suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0 + 8 \cdot \frac{0,75}{1-0,75} = 24 \text{ (tonnia)}.$$

8. (a) Tehdään aluksi osamurtokehitelmä eli etsitään kertoimet A, B siten, että

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \\ \Leftrightarrow \quad 0 \cdot n + 1 &= (A+B)n + 2A. \end{aligned}$$

Kaava pätee kaikilla $n \geq 0$, joten

$$\begin{cases} 0 = A+B, \\ 1 = 2A \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/2, \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Sarja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n+2} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \sum_{n=3}^{k+2} \frac{1/2}{n}.$$

Kun $k \geq 3$ indeksejä $3 \leq n \leq k$ vastaavat termit kumoutuvat, joten

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \sum_{n=3}^{k+2} \frac{1/2}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - 0 - 0\right) = \frac{3}{4},$$

(b) Sarja hajaantuu: $\sqrt{n} \le n$ kun $n \ge 1$, ja

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

koska *harmoninen sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ tunnetusti hajaantuu.

9. (a)

$$\frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{25}{8}\right) = 3 + \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{31}{8},$$
$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{13}{9}\right) = 1 + \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{14}{9}.$$

(b) Ensimmäiset kuusi termiä ovat

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3}.\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3}.$$

10. (a) Tämä on geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - z/2} = \frac{2}{2 - z},$$

joka suppenee, kun $|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$.

(b) Geometrinen sarja

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n = \frac{2}{1 + 2z}$$

joka suppenee, kun $|-2z| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1/2$.

(c) This is the sum of a constant and a geometric series

$$4 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = 4 + 3 \cdot \frac{z/3}{1 - z/3} = 4 + \frac{3z}{3 - z},$$

suppenee, kun $|z/3| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3$.

(d) Geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1 - z^2}$$

suppenee, kun $|z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.