

Tehtävät 2, ma 22.5. - pe 26.5.

Tavoite:

- tehtävät 1-4 käydään läpi alkuviikon harjoitustilaisuudessa (ma klo 14-16, lähiopetus)
- tehtävät 5-7 käydään läpi loppuviikon harjoitustilaisuudessa (to klo 9-11, online)
- tehtävät 8-10 palautetaan MyCourses-alustalle

Harjoitustehtäviin liittyvää materiaalia löytyy kurssikirjasta

**Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition) luvuista 9.3 ja 9.4**

1. Mitkä seuraavista sarjoista suppenevat/hajaantuvat?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+5n-3}$

2. Miksei seuraavien sarjojen suppenemista/hajaantumista voi päätellä integraalitestin avulla?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin n$

3. Päättele annettujen sarjojen suppeneminen vertailemalla.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n$  vs  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$  vs  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

4. Mitkä seuraavista sarjoista suppenevat?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{\sqrt{n^3+n^2+8}}$
- (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

5. Mitkä seuraavista sarjoista suppenevat?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2n^3+2n}$
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+1}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

6. Mitkä annetuista sarjoista suppenevat/hajaantuvat?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$   
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \sin(n\pi/2)$

7. Mitkä seuraavista sarjoista suppenevat itseisesti tai ehdollisesti, mitkä hajaantuvat?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$   
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$   
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$   
 (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

### Palautettavat tehtävät

8. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \text{ suppenemista.}$$

9. Tässä tehtävässä konstruoidaan Cantorin 1/3-joukkona tunnettu fraktaali. Tarkastellaan reaalilukuväliä  $[0, 1]$ , jaetaan se kolmeen yhtä pitkään väliin ja poistetaan keskimmäinen väli. Seuraavassa vaiheessa poistetaan keskimmäinen kolmannes jäljelle jääneistä kahdesta välistä. Kolmannessa vaiheessa poistetaan keskimmäinen kolmannes jäljelle jääneistä väleistä jne.

- (a) Piirrä kuva prosessin vaiheista.  
 (b) Etsi sarja, joka määrää  $n$ :nessä vaiheessa poistettujen välien yhteispituuden.  
 (c) Jos jatketaan prosessia rajattomasti, mikä tulee olemaan poistettujen osien kokonaispituus?

10. Etsi pienin kokonaisluku  $n$ , joka takaa sen, että pätee  $|s_n - s| < 0,001$ , kun  $s$  on sarjan summa ja  $s_n$  sarjan  $n$ . osasumma.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$   
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$