MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Ratkaisut 2, tehtävät 1-10

1. (a) Hajaantuu: kun $n \geq 1$, pätee $n^2 \geq n$ ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Osoitettiin, että sarjalla on minoranttina (osasummiltaan pienempänä sarjana) harmoninen sarja, joka tunnetusti hajaantuu, joten alkuperäinen sarja myöskin hajaantuu.

(b) Suppenee: käytetään suhdetestin raja-arvomuotoa, ts. d'Alembert'n kriteeriä:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

(c) Suppenee: arvoilla $n \geq 1$ pätee $5n-3 > 0$ ja positiivitermistä sarjaa majoroi (osasummiltaan suurempana sarjana) kahden superharmonisen sarjan summa, joka tunnetusti suppenee.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+5n-3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3} < \infty.$$

2. Integraalitestissä vertaillaan integraalia ja sarjaa lausekkeesta, joka on epänegatiivinen ja ei-kasvava. Oheiset sarjat eivät toteuta jotakin oletusta.

(a) Tämä on kasvavista termeistä koostuva sarja. Kuitenkin, hajaantuminen voidaan perustella sen avulla, että löytyy minoroiva integraali, joka hajaantuu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 > \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \geq \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^2 \mathrm{d}x = \infty.$$

(b) Tämä on vuorotteleva sarja. Kuitenkin, integraalitestillä voidaan tutkia suppeneeko sarja absoluuttisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{n} = \infty \text{ (hajaantuu)}.$$

※ Itse asiassa, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ suppenee vuorottelevana sarjana ns. Leibnizin kriteerin nojalla: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ suppenee, jos (i) $a_n > 0$ $\forall n$, (ii) $(a_n)_n$ on vähenevä, ja (ii) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(c) Tämä sarja ei ole positiiviterminen. Kuitenkin, se suppenee absoluuttisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-n}\sin n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n},$$

mitä majoroi integraali

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} \leq \lim_{N\to\infty} \int_1^N \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}} < \infty,$$

mikä osoittaa, että alkuperäinen sarja suppenee.

3. Kussakin tapauksessa tutkitaan raja-arvoa $\lim_n a_n/b_n$, missä b_n on annetun "kontrollisarjan" termi.

   (a) Suppenee: $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ on suppeneva geometrinen sarja ja

$$\lim_n \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n \cdot 3^n = \lim_n \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} < \infty.$$

   (b) Suppenee: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ on superharmoninen ja siis suppeneva, ja

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cdot n^2 = n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1+\cos\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}} = n^2\cdot\frac{1-\cos^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^2}{1+\cos\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} < \infty,$$

   missä termin $n\sin\frac{1}{n}$ raja-arvo on tuttu Harjoitukset 1, tehtävä 1f.

4. (a) Suppenee. Käytä suhdetestin raja-arvomuotoa ja laske $\rho = \lim_n |a_{n+1}/a_n|$:

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1.$$

   (b) Hajaantuu. Termi on suuruinpiirtein $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$, joten lasketaan $\lim_n a_n/b_n$ missä $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}$, mikä on subharmoninen ja suppenee.

$$\frac{n-4}{\sqrt{n^3+n^2+8}}\cdot\sqrt{n} = \frac{n^{3/2}-4n^{1/2}}{\sqrt{n^3+n^2+8}} = \frac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 < \infty.$$

   (c) Suppenee. Sarja on ei-negatiivinen ja vähenevä, joten voidaan käyttää integraalitestiä:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\ln x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \quad (\text{muuttujanvaihto } u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x})$$
$$= \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

5. (a) Hajaantuu. Huomataan, että $0 < n^4+2n^3+2n < n^4+2n^4+2n^4 = 5n^4$, joten sarjalla on hajaantuva minorantti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2n^3+2n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

   (b) Hajaantuu, kuten nähdään suhdetestin raja-arvomuodosta:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n^3+1)}{n^3+3n^2+3n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = 2 > 1.$$

(c) Suppenee. Tämä on geometrinen sarja suhdeluvulla $r = \mathrm{e}^{-1} < 1$, ja summa on

$$\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}.$$

Toinen vaihtoehto on käyttää suhdetestin raja-arvomuotoa

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)}}{\mathrm{e}^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$

6. (a) Suppenee. Tämä on vuorotteleva sarja, joten voidaan käyttää Leibnizin kriteeriä. Jono $(a_n)_n$ on vähenevä, koska

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{-\frac{1}{2}}}{n^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1.$$

Lisäksi $|a_n| = n^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, joten kriteeriä voidaan käyttää.

(b) Suppenee. Tämä on vuorotteleva sarja ja voidaan käyttää Leibnizin kriteeriä, kuten kohdassa (a). Sarjalla on myös majoranttina superharmoninen ja siten suppeneva sarja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(c) Suppenee. Huomaa, että

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

joten saadaan vuorotteleva sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1},$$

joka toteuttaa Leibnizin kriteerin:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n-1}{2n+1} < 1, \text{ and } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

7. (a) Suppenee itseisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

mikä on suppeneva geometrinen sarja.

(b) Huomaa, että kysymyksessä on virhe: summausindeksin tulee alkaa arvosta $n = 1$. Sarja suppenee, mutta ei itseisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

mikä on harmoninen sarja ja tunnetusti hajaantuu. Vuorotteleva sarja suppenee, koska $a_n = (2n)^{-1}$ toteuttaa leibnizin kriteerin:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1, \text{ ja } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(c) Hajaantuu. Muistetaan, että jos sarja suppenee, niin $\lim_n |a_n| = 0$. Nyt

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 > 0.$$

(d) Suppenee itseisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

mikä on superharmoninen ja suppeneva.

8. Juuritesti: jos $a_n > 0$ ja $\sigma = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$, niin sarja suppenee, jos $0 < \sigma < 1$ ja hajaantuu, jos if $\sigma > 1$. Tapaus $\sigma = 1$ ei kerro mitään suppenemisesta. Nyt

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

joten sarja suppenee.

※ Idea: kun n on tarpeeksi suuri, esimerkiksi $n \geq N$, jos pätee $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$, niin $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} k^n$, mikä on suppeneva geometrinen sarja.

Toinen ratkaisu majoranttiperiaatteella: Olkoon

$$b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Huomaa, että b_n on vähenevä: $1/\mathrm{e} < b_n \leq b_1 = 1/2$, ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 < \infty$$

joten sarja suppenee.

9. (b) Poistettujen välien kokonaispituus ensimmäisessä kolmessa vaiheessa on

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot \frac{1}{3}, \\ v_2 &= v_1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \\ v_3 &= v_2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Päätellään (tai osoitetaan induktiolla) että n askeleen jälkeen poistettujen osien kokonaispituus on geometrinen summa

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

※ $\sum_{k=1}^{n} r^k = r \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1 - 0 = 1.$$

Kuitenkin, joukossa on silti ylinumeroituva määrä pisteitä – tavanomainen tapa niiden “pituuden” mittaamiseksi on liian karkea huomatakseen niitä.

10. Molemmat ovat vuorottelevia sarjoja, jotka toteuttavat Leibnizin kriteerin (vertaa tehtävään 1(b)). Erityisesti, $|a_n| > |a_{n+1}|$ ja $\lim_n |a_n| = 0$. Jos $S_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} a_n$ on k:s sarjan osasumma ja $S_k \xrightarrow[k \to \infty]{} S$, niin

$$|S_k - S| \leq |S_k - S_{k+1}| = a_{k+1}.$$

Kussakin tapauksessa, etsitään pienin k siten, että $|a_{k+1}| < 10^{-3}$. Käytännössä tämä on helpointa tehdä laskemalla termit numeerisesti.

(a)
$$|a_4| = \frac{1}{(2 \cdot 4)!} \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad |S_3 - S| < 10^{-3}.$$

(b)
$$|a_{14}| = \frac{14}{2^{14}} \approx 8,5 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad |S_{13} - S| < 10^{-3}.$$