MALLIRATKAISUT, MATRIISILASKENTA, MS-A0002

- Laskuvirheestä tulee 0,5 pisteen vähennys.
- Jos laskuvirhe vaikuttaa seuraavien askelien laskut, voi silti saada lopputehtävästä täydet pisteet, paitsi jos laskuvirhe on aiheuttanut tehtävän luonteen muutosta.
- Epätäydellisestä supistuksesta (esim vastauksista $\sqrt{49}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\ln e^2$) tulee 0,5 pisteen vähennys.
- Epäselvästä (mutta pääasiassa oikeasta) perustelusta tulee 1 pisteen vähennys per tehtävä. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.

Tehtävä 1

Olkoon A (3×2)-matriisi, ja olkoon B (2×3)-matriisi, siten että (2×2)-matriisi BA on sekä käännettävä että diagonalisoitava. Vasta jokaiselle alla olevalle lauseelle, onko se välttämättä tosi, välttämättä epätosi, vai saattaako se olla joko tosi tai epätosi.

a) Matriisi AB on käännettävä.
b) Matriisi AB on diagonalisoitava.
c) Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ on ääretön määrä ratkaisuja.
d) Yhtälöllä $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ on ääretön määrä ratkaisuja.

Ratkaisu 1

a) **Epätosi**, sillä yhtälöllä $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ääretön määrä ratkaisuja (katso (d)), ja kaikki nämä ratkaisut ovat yhtälön $(AB)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu, joten AB on degeneroitunut.
b) **Tosi**, sillä matriisillä BA on kaksi riippumatonta ominaisvektoria $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ (koska BA on diagonalisoitava), ominairarvoilla $\lambda_1 \neq 0$ ja $\lambda_2 \neq 0$ (sillä jos ominaisarvo olisi 0, niin yhtälöllä $BA = 0$ olisi degeneroitunut). Sitten vektorit $A\mathbf{x}_1$ ja $A\mathbf{x}_2$ ovat linearisesti riippumatomat ominaisvektorit matriisille BA, samoilla ominaisarvoilla. Tämän lisäksi, matriisilla AB on ominaisarvo nolla (koska se ei ole käännetävää), ja vastaava ominaisvektori on riippumaton vektoreista $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$, koske ne vastaavat eri ominaisarvoihin. Siispä (3×3)matriisilla AB on kolme lineaarisesti riimmpumatonta ominaisvektoria, joten se on diagonalisoitava.
c) **Epätosi**, sillä jokainen yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu on myös yhtälön $BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu, ja sellaista ratkaisua on vain yksi, koska BA on käännettävä.
d) **Tosi**, sillä matriisilla B on enemmän sarakkeita kuin riviä, joten tämän porrasmuodossa on aina sarake ilman tukialkiota.

Tehtävä 2

Laske kolmannen asteen polynoomi $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, jolle pätee

$$\begin{cases} f(2) &= 19 \\ f(1) &= 2 \\ f(-1) &= -2 \\ f(-2) &= -13 \end{cases}$$

Ratkaisu 2

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = f(2) & = 19 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = f(1) & = 2 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 & = f(-1) & = -2 \\ -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 & = f(-2) & = -13 \end{cases} \quad \text{(1p)},$$

joka kirjoitetaan liittomatriisina (1p) ja Gauss-eliminoidaan (läliaskelia vaaditaan)(1p)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

jossa muuttujat ovat (a_3, a_2, a_1, a_0) tässä järjestyksessä. Polynomi on siis

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 1. \text{ (1p)}$$

Tehtävä 3

Laske etäisyyden $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|$ pienin mahdollinen arvo, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Ratkaisu 3

Kirjoitetaan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ja huomataan että $\|A\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ minimoidaan kun $A\mathbf{x} - \mathbf{v} \perp \mathcal{C}(A)$, joten (normaaliyhtälöt)

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{v} \text{ eli } \mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{v} \text{ (1p)}.$$

Nyt lasketaan

$$A^T A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \text{ (0,5p), joten } (A^T A)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \text{ (0,5p)}.$$

Siispä

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{v} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 17 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ (1p)}. \end{aligned}$$

Etäisyys on siis

$$\left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 17 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 17 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{35}}{5} = \sqrt{\frac{7}{5}} \text{ (1p)}$$

Tehtävä 4

Olkoon
$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 \right\}.$$
Etsi avaruudelle V ortonormaali kanta.

Ratkaisu 4

Etsitään ensin kanta esimerkkiksi kirjoittamalla yhtälöt liittomatriisina ja ratkaisemalla tämän (1p)
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
Avaruuden V vektorit ovat siis parametrimuodossa $x_5 = t$, $x_4 = s$, $x_3 = t - s$, $x_2 = r$, $x_1 = t - r$ (1p), eli muodossa
$$r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
oleva vektori. Siispä kanta on
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ (1p)}$$
Gram-Schmidt-ortoganisoidaan: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, ja koska $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ pätee myös $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$. Saadaan nyt
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (1p).}$$
Loppuksi normaalisoidaan ja saadaan ortonormaali kanta
$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ (1p)}$$

Tehtävä 5

Neliömatriisin $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *jälki* on $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Olkoot B ja C $(n \times n)$-matriisit. Näytä, että tällöin pätee
$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB).$$

Ratkaisu 5

Olkoon $M_{i,j}$ yleisen $(n \times n)$ matriisin M alkio paikassa (i, j). Tällöin
$$\mathrm{tr}(BC) = \sum_{i=1}^{n} (BC)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} C_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ki} B_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (CB)_{kk} = \mathrm{tr}(CB).$$