MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Ratkaisut 3, tehtävät 1-6

Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *suppenemissäde* ρ on

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \in [0, \infty],$$

jos raja-arvo on olemassa.

- Kun $0 < \rho < \infty$, sarja suppenee välillä $(\rho - x_0, \rho + x_0)$ ja hajaantuu välillä $(-\infty, \rho - x_0) \cup (\rho + x_0, \infty)$. Välien päätepisteissä suppenemista täytyy tarkastella erikseen.
- Kun $\rho = 0$, sarja suppenee vain pisteessä $x = x_0$.
- Kun $\rho = \infty$, sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1.
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{n} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}.$$

Testi kertoo, että sarja suppenee, kun $|x| < 1/2$ ja hajaantuu, kun $|x| > 1/2$. Tapaus $|x| = 1/2$ täytyy tutkia erikseen.

Kun $x = 1/2$, sarjaksi saadaan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
mikä on harmoninen sarja ja tunnetusti hajaantuu.

Kun $x = -1/2$, sarjaksi saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

mikä on vuorotteleva sarja, joka suppenee Leibnizin kriteerin nojalla (katso ratkaisu tehtävään Harjoitus 2:2b).

Siis, sarja suppenee täsmälleen arvoilla $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

2. (a)
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Tämä on geometrinen sarja, joka suppenee, kun $-2 < x < 2$.

(b)

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

※ Tässä sarjaa voidaan derivoida termeittäin, koska sarja suppenee, kun $-2 < x < 2$, ja funktio $(x/2)^n$ on jatkuvasti derivoituva. Yleisesti, ei ole luvallista tehdä raja-arvon sisältäviä operaatioita (integrointeja, derivointeja, sarjojen summauksia) mielivaltaisessa järjestyksessä. Mittateoria antaa ehtoja, joiden voimassa ollessa järjestystä voidaan vaihtaa, mutta täysi perustelu on tämän kurssin ulkopuolella.

Täytyy vielä selvittää uuden potenssisarjan suppenemissäde:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right| = 2,$$

mikä tarkoittaa, että sarja suppenee, kun $-2 < x < 2$. Arvot $x = \pm 2$ selvästi tuottavat hajaantuvan sarjan.

(c)

$$\ln(2-x) = \begin{cases} -\int \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x, & x < 2, \\ \ln 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$-\int \frac{1}{2-x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int\left(\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + C.$$

※ Sama varoitus kuin kohdassa (b) sarjan termeittäin integroimisessa.

Sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että $C = \ln 2$:

$$x \mapsto \ln(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Suppenemissäde löydetään kuten yllä:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2,$$

joten sarja suppenee ainakin, kun $|x| < 2$. Tutkitaan päätepisteet $x = \pm 2$ erikseen.

Kun $x = 2$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

mikä on harmoninen sarja ja hajaantuu.

Kun $x = -2$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

mikä suppenee Leibnizin kriteerin nojalla, kuten Harjoituksessa 2:2b. Siis (1) suppenee, kun $-2 \le x < 2$.

(d)

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n .$$

Tämä on geometrinen sarja, joka suppenee, kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ (huomaa (a)).

3. (a) f on määritelty niillä $x \in \mathbb{R}$, joille $x^2 - 1 \neq 0$, eli $x \neq \pm 1$.

(b) Kysymyksessä on käännösvirhe. The correct term is “extend”, not “expand”.

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1, \quad \lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{-(x^2-1)} = -1.$$

Yksipuoleiset raja-arvot eivät ole samat, joten $\lim_{x\to 1} f(x)$ ei ole olemassa, ja funktiota f ei voida laajentaa jatkuvaksi joukkoon $\mathbb{R}$.

(c) Alkukuva $f^{-1}\{\bullet\}$ koostuu niistä muuttujan x arvoista, joissa f on määritelty ja saadaan annetut arvot.

$$f = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1, & |x| > 1, \\ \frac{x^2-1}{-(x^2-1)} = -1, & |x| < 1; \end{cases}$$

$$f^{-1}\{-1\} = (-1,1); \quad f^{-1}\{1\} = (-\infty,-1) \cup (1,\infty); \quad f^{-1}\{0\} = \varnothing.$$

4. (a) Raja-arvo ei ole olemassa, paitsi kun $\lim_{x\to 4}(x^2 - k^2) = 0$, eli kun, $k = \pm 4$. Tällöin

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-k^2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8.$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+5}{4x+1+x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+x^{k-2}} = \lim_{x\to\infty} x^{2-k} = \begin{cases} \infty, & k < 2 \\ 1, & k = 2 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Raja-arvo on olemassa, kun $k \geq 2$.

(c) Huomaa, että $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ riippumatta luvun k arvosta. Raja-arvojen tulon säännön nojalla

$$\begin{aligned} k < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-5}{\mathrm{e}^{kx}+3} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{2x}-5)}{\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{kx}+3)} = 0, \\ k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-5}{1+3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}, \\ k > 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-5}{\mathrm{e}^{kx}+3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Toisin sanoin, raja-arvo on olemassa kaikilla $k \in \mathbb{R}$.

5. (a) Etsitään suppenemissäde tavalliseen tapaan:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 2,$$

joten sarja suppenee ainakin, kun $|x-5|<2$, eli kun $3<x<7$.

Tutkitaan päätepisteet erikseen. Kun $x=3$, saadaan $\sum_n n^{-2}$, mikä on superharmoninen ja suppenee. Kun $x=7$, sarja on $\sum_n (-1)^n n^{-2}$, mikä suppenee itseisesti.

Alkuperäinen sarja suppenee täsmälleen arvoilla $3 \le x \le 7$.

(b) Huomaa, että kunhan sarja suppenee, lukua x voidaan käyttää skaalaustekijänä, ja muuttujanvaihto $t = x^2$ tuottaa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

mikä on funktion $x(e^{x^2}-1)$ potenssisarjaesitys. Suppenemissäde on

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

joten sarja (odotusten mukaisesti) suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{5^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5},$$

joten sarja suppenee ainakin, kun $|x| < 1/5$.

Tutkitaan päätepisteitä: kun $x = 1/5$, saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

mikä suppenee. Kun $x = -1/5$, saadaan $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$, mikä on vuorotteleva sarja ja suppenee Leibnizin kriteerin nojalla.

Alkuperäinen sarja suppenee, kun $-\frac{1}{5} \le x < \frac{1}{5}$.

6. Tämän tehtävän raja-arvot voi löytää monella tapaa. Yksi tapa on *l'Hospitalin sääntö:* Olkoot f, g jatkuvia joukossa $I \setminus \{a\}$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja $a \in I$. (Tapaukset $a = \pm\infty$ sallitaan.) Lisäksi, oletetaan, että

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ tai } \pm\infty, \text{ ja } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ on olemassa } (A \in \mathbb{R} \text{ tai } \pm\infty).$$

$$\text{Tällöin } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Toinen tapa on käyttää Taylorin sarjaa funktioille e^x, $\sin x$, and $\cos x$ at 0:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

(a)

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right) = 2 + \mathcal{O}(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 2$$

(b)

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = 1 + \mathcal{O}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

(c)

$$\frac{\cos(3x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(-\frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \ldots\right) = -\frac{9x}{2!} + \mathcal{O}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

7.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Funktio $x^2 \sin(1/x)$ on jatkuvien alkeisfunktioiden tulo ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan, eli kun $x \neq 0$. Tutkitaan funktion raja-arvoa pisteessä $x = 0$. Koska

$$0 \leq \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

kuristusperiaatteen nojalla saadaan $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ja todetaan, että f on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

(b)–(c) Kun $x \neq 0$, derivaatta on olemassa ja löydetään derivoimalla lauseketta

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Derivaatta pisteessä $x = 0$ joudutaan laskemaan raja-arvon määritelmän nojalla

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0,$$

koska $0 \leq |h\sin(1/h)| \leq |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$; vertaa kohtaan (a). Raja-arvo on olemassa, ja todetaan, että $f'(0) = 0$ ja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(b) Osoitetaan, että $f'(x)$ on epäjatkuva origossa. Selvästi (katso ylläolevaa)

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0 - \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}.$$

Tutkitaan jonoa $(a_n)_n$, missä $a_0 = 0$ ja $a_n = 1/n\pi, n \geq 1$. Nyt $\lim_n a_n = 0$ ja

$$\cos\frac{1}{a_n} = \begin{cases} -1 & n = 2k+1, \\ 1, & n = 2k,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, . \end{cases}$$

Muistetaan raja-arvon täsmällinen määritelmä: $\lim_{x\to a} g(x) = L$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että $|x-a| < \delta$ takaa, että $|g(x)-L| < \varepsilon$. Nyt, jotta f' voisi olla jatkuva origossa, haluttaisiin, että $\lim_{x\to 0} \cos x^{-1} = 0 = f'(0)$. Kuitenkin, olkoon $\varepsilon \in (0,1)$ mielivaltainen. Kaikilla $\delta > 0$ on olemassa n siten, että

$$|a_n - 0| < \delta \quad \text{ja} \quad \left|\cos\frac{1}{a_n} - f'(0)\right| = \left|\cos\frac{1}{a_n}\right| = 1 > \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

※ Itse asiassa, $\lim_{x\to 0} \cos x^{-1}$ ei ole olemassa.

8. (a) $P_3(x; \frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x-\pi/4}{\sqrt{2}} - \dfrac{(x-\pi/4)^2}{2\sqrt{2}} - \dfrac{(x-\pi/4)^3}{6\sqrt{2}}$,

   (b) $P_3(x; \frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{x-\pi/4}{\sqrt{2}} - \dfrac{(x-\pi/4)^2}{2\sqrt{2}} + \dfrac{(x-\pi/4)^3}{6\sqrt{2}}$,

   (c) $P_3(x; 1) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$.

9. Taylorin sarja on yksikäsitteinen, joten

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vertaamalla muuttujan x potenssien kertoimia saadaan

$$\frac{f'(0)}{1!}x = 0\cdot x, \quad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 0\cdot x, \quad \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} = \frac{x^{10}}{5!},$$

joten, $f'(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 0$, ja $f^{(10)}(0) = 10!/5! = 30240$.

10. (a) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{x^2}$.

   (b) Huomaa, että

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \ \text{ja} \ -\mathrm{e}^{-x} = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\right),$$

joten olettamalla $x \neq 0$ saadaan

$$1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x} = \frac{\sinh x}{x} = f(x).$$

Kun $x \to 0$, sarjaesityksestä seuraa välittömästi, että $f(x) \to 1$, joten

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$