MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Ratkaisut 6, tehtävät 1-4

1. Separointi ja integrointi tuottaa

$$x - y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int x \,\mathrm{d}x = \int y^2 \mathrm{d}y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{3}y^3,$$

$$\text{mistä saadaan ratkaisu } y(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + C\right)^{\frac{1}{3}}.$$

2. Separoidaan, integroidaan, ja ratkaistaan y, jolloin saadaan

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^3 \,\mathrm{d}x \ (y \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^4}{4} + \frac{C}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{4}{x^4 + C}.$$

Lisäksi nähdään, että triviaali ratkaisu $y \equiv 0$ on myös ratkaisu.

3. (a) Sijoittamalla $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ yhtälöön saadaan

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda - 15\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0,$$

koska $\mathrm{e}^{\lambda x} > 0$ pätee aina.

(b)

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} -3 \\ \ \ 5, \end{cases}$$

(c) $y(x) = A\mathrm{e}^{-3x} + B\mathrm{e}^{5x}$.

4. Jätetään huomiotta triviaaliratkaisu $y \equiv 0$.

(a) Karakteristisella yhtälöllä $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ on kaksoisjuuri

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = 2,$$

joten yleinen ratkaisu on $y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + Bx\mathrm{e}^{2x}$.

(b) Karakteristinen yhtälö on nyt $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, joten

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i}, \end{cases} \qquad y(x) = \mathrm{e}^x \left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Koealue päättyy tähän