MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)
Harjoitustentti 19.6.2023

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita.

1. Laske raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

   Molemmat kohdat (3p).

2. Suppenevatko seuraavat sarjat?
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^n}{n+3\ln(n)}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n.$$

   (a) Määritä sarjan suppenemissäde R.
   (b) Suppeneeko sarja arvolla $x = R$ tai arvolla $x = -R$?
   (c) Millä reaalivälillä sarja suppenee?

4. Laske integraalit
   (a) $\int x^2 e^{-x} dx$
   (b) $\int_1^2 \frac{\ln(x^2)}{x} dx$

5. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt
   (a) $y' = -y^4 \frac{4x+14}{x^2+7x}$
   (b) $y'' + 4y' - 4y = 0$

6. Olkoon $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots.$$

   Olkoon $F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, se funktio, jolle $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in (-1,1)$ ja $F(0) = 0$. Olkoon $G(x) = F(x) - F(-x)$. Esitä funktioiden F ja G Taylorin sarjat kehityskeskuksella $a = 0$. Laske luku $G'''(0)$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee, jos ja vain jos $p > 1$.

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$