MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)
Harjoitustentti 19.6.2023, ratkaisut

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita.

1. Laske raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

Molemmat kohdat (3p).

Ratkaisu. Neliöjuurien erotuksesta päästään eroon, kun muistetaan kaava $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, nimittäin

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Jotta raja-arvo voidaan laskea, täytyy supistaa yksi n. Saadaan

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} &= \frac{n(1-1/n)}{n(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+1/n^2})} \\ &= \frac{1-1/n}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+1/n^2}} \to \frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$.

Raja-arvo on muotoa "$\frac{\infty}{\infty}$". Käyttämällä L'Hospitalin lausetta kahdesti saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0.$$

2. Suppenevatko seuraavat sarjat?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^n}{n+3\ln(n)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Ratkaisu. Ensimmäisen sarjan yleisen termin raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+e^n}{n+3\ln(n)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+e^n}{1+3/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\infty}{1+0} = \infty \neq 0,$$

joten sarja hajaantuu.

Tutkitaan toista sarjaa suhdetestillä. Merkitään $a_n = \frac{n!}{n^n}$, saadaan

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^(n+1)} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \to e^{-1} < 1,$$

kun $n \to \infty$. Suhdetestin nojalla sarja suppenee.

3. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n.$$

(a) Määritä sarjan suppenemissäde R.

(b) Suppeneeko sarja arvolla $x = R$ tai arvolla $x = -R$?

(c) Millä reaalivälillä sarja suppenee?

Ratkaisu. Merkitään sarjan kertoimia $c_n = \frac{n^2}{2^n}$. Suppenemissäde on

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{t\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \Big/ \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \lim_{t\to\infty} (n/(n+1))^2 \frac{1}{2} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jos $x = R = \frac{1}{2}$, sarjaksi saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2,$$

joten sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa ja siten sarja hajaantuu. Jos $x = -R = -\frac{1}{2}$, sarjaksi saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2,$$

joka myös hajaantuu.

Sarja suppenee, kun Sarja suppenee välillä $\in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, eli kun

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

4. Laske integraalit

(a) $\int x^2 e^{-x} dx$

(b) $\int_1^2 \frac{\ln(x^2)}{x} dx$

Ratkaisu. (a) Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} + C\end{aligned}$$

missä $C \in \mathbb{R}$. Tuloksen voi tarkistaa derivoimalla

(b) Sijoitetaan $x = e^t$, jolloin $t = \ln x$ ja $dt = \frac{1}{x} dx$. Lisäksi, kun $x = 1$, niin $t = \ln(1) = 0$ ja kun $x = 2$, niin $t = \ln(2)$. Integraali on

$$\int_0^{\ln(2)} \ln(e^{2t}) dt = \int_0^{\ln(2)} 2t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=\ln(2)} = (\ln(2))^2.$$

Vastausta ei voi oikein sieventää enempää.

5. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt

   (a) $y' = -y^4 \frac{4x+14}{x^2+7x}$

   (b) $y'' + 4y' - 4y = 0$

   Ratkaisu. (a) Jos $y(x) \neq 0$, niin separoidaan

$$\frac{1}{y^4} dy = 2\frac{(x^2+7x)'}{x^2+7x} dx.$$

   Integroimalla puolittain saadaan

$$-\frac{1}{3y^3} = 2\ln(x^2+7x) + C.$$

   Saadaan

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-6\ln(x^2+7x) - 3C}}$$

   missä vastaus siistiytyy hieman, jos merkitään $-3C = A$. Siis yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{A - 6\ln(x^2+7x)}}$$

   missä $A \in \mathbb{R}$.

   (b) Yhtälöstä $y'' + 4y' - 4y = 0$ saadaan yritteellä $y = e^{\lambda x}$ karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$, josta toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2.$$

   Siis karakteristisella yhtälöllä on tuplajuuri $\lambda = -2$. Siis yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x},$$

   missä $A, B \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

6. Olkoon $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots.$$

   Olkoon $F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in (-1,1)$ ja $F(0) = 0$. Olkoon $G(x) = F(x) - F(-x)$. Esitä funktioiden F ja G Taylorin sarjat kehityskeskuksella $a = 0$. Laske luku $G'''(0)$.

   Ratkaisu. Integroimalla yhtälöä

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

   saadaan

$$F(x) = \log\frac{1}{1-x} = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

missä C on jokin vakio. Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $0 = C$, joten

$$F(x) = \log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots.$$

Siis

$$-F(-x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots.$$

Siis

$$G(x) = \log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Nähdään, että

$$G'(x) = 2\left(0 + \frac{6}{3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3x^2}{5} + \dots\right),$$

joten

$$G'(0) = 4.$$

Tai

$$G'(x) = (F(x) - F(-x))' = F'(x) + F'(-x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Siis

$$G''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \quad \text{ja} \quad G'''(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1-x^2)^3},$$

joten $G'''(0) = 4$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee, jos ja vain jos $p > 1$.

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$