Muutamia ajatuksia dimensioanalyysin matemaattisesta perustasta

Jami Kinnunen

11. syyskuuta 2022

Avaan tässä dokumentissa hieman luennollakin esittämääni ajatusta siitä, että potenssifunktioita lukuunottamatta mikään matemaattinen funktio ei voi antaa ulos dimensiollista tulosta. Puhtaan matemaattiselta kannaltahan tämä on aika outo ajatus ja vaikuttaa siltä että tässä tehdään kauaskantoisia oletuksia fysikaalisten yhtälöiden rakenteesta. Perehdytään siis hieman syvemmälle fysiikan yhtälöiden matemaattiseen rakenteeseen.

Tärkeä ja ainoa oletus

Aloitetaan tärkeimmästä, eli siitä ainokaisesta oletuksesta joka fysiikan yhtälöiden matemaattiseen rakenteeseen tehdään: yhtälöt ovat yksikkövalinnasta riippumattomat. Tämä tarkoittaa siis yksinkertaisesti sitä, että fysiikan ilmiöt, ja siis niitä kuvaavat lait ja näitä lakeja kuvaavat matemaattiset relaatiot eivät muutu vaikka metrien sijasta käyttäisimme pituuden yksikkönä jaardia, tuumaa, mailia tai vaikkapa peukalonmittaa.

Matemaattinen kuvaus

Menemättä sen syvemmälle matemaattiseen analyysiin, kuvaus f on jokin 'sääntö', joka liittää kaksi tai useamman alkion toisiinsa. Oleellista kuvauksen määrittelyssä on lähtöjoukko $\mathscr{A}$ ja maalijoukko $\mathscr{B}$, joiden joukkojen välisten alkioiden välille kuvaus f näitä liitoksia tekee. Merkitsemme siis kuvauksen f toiminta-avaruuden näin

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}. \tag{1}$$

Jos kuvaus on vieläpä luonteeltaan sellainen, että jokaista lähtöjoukon $\mathscr{A}$ alkiota x vastaa *yksi ja vain yksi* maalijoukon $\mathscr{B}$ alkio, niin kyseessä on *funktio* ja voimme kirjoittaa:

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}; x \to f(x), \tag{2}$$

missä siis *funktion parametrit ovat lähtöjoukon alkiota*, eli $x \in \mathscr{A}$ ja *funktion arvot ovat maalijoukon alkioita*, eli $f(x) \in \mathscr{B}$.

Edellä määriteltiin kuvaus ja funktio aika tarkasti, koska dimensionaalianalyysin kannalta on hyvin tärkeää ymmärtää kuvauksen lähtö- ja maalijoukkojen rakenne.

Luvut ja yksiköt

On hyvin eri asia tarkastella puhdasta matemaattista lukua, esimerkiksi reaalilukua $a \in \mathscr{R}$ kuin jotakin fysikaalista suuretta kuvaavaa yksiköllistä alkiota, esimerkiksi pituutta 5 m. Jälkimmäisessä alkiossa on nimittäin kaksi osaa: numeerinen osa (5) ja yksikkö (m). Ensimmäinen voidaan ajatella reaalilukuna mutta jälkimmäinen osa on jotakin mikä ei ole itse asiassa luku laisinkaan vaan jonkinlaisen abstraktin 'yksikköavaruuden' alkio. Tämä ero tekee myös sitten yksiköllisistä kuvauksista heti sangen erilaisia verrattuna dimensiottomiin kuvauksiin. Vertaa esim.

$$f_1 : \mathscr{R} \to \mathscr{R}; x \to f_1(x) = \sin(x) \tag{3}$$

ja

$$f_2 : \mathscr{A} \to \mathscr{R}; (x,d) \to f_2(x,d) = \sin(x), \tag{4}$$

missä lähtöjoukko $\mathscr{A} = \{(x,d) | x \in \mathscr{R}, d \in \mathscr{D}\}$, ja $\mathscr{D}$ on edellä mainittu 'yksikköavaruus'. Eli jälkimmäisessä kuvauksessa lähtöjoukon alkiot koostuvat numeerisesta arvosta x ja valitusta yksiköstä d.

Kaikki (fysikaaliset) kuvaukset, joissa on yksiköllisiä parametreja, pitääkin nyt ainakin ajatustasolla ymmärtää olevan jälkimmäistä luokkaa. Käytännön laskuissa emme tietenkään näin tee mutta yo. rakenne on implisiittisesti siellä taustalla.

Seuraavaksi vaadimme alussa esittämämme yksikköriippumattomuuden.

Dimensionaalinen homogenisuus

Miksi fysiikan yhtälöiden pitää olla dimensionaalisesti homogeeniset? Syynä on yksinkertaisesti edellä mainittu vaatimus, että fysiikan yhtälöt (jotka kuvaavat jotakin fysikaalista ilmiötä) eivät voi riippua yksikkövalinnasta. Ongelmana nyt matemaattisten kuvausten kannalta on se, että yksiköllisten alkioiden $(x,d) \in \mathscr{R} \times \mathscr{D}$ numeerinen osa x ja yksiköllinen osa d ovat yhteydessä toisiinsa. Ne muodostavat eräänlaisen *ekvivalenssiluokan*, jolla tarkoitetaan sitä että esimerkiksi edellä mainittu pituus 5 m on *sama asia* kuin 5.46805 jaardia. Matemaattisten kuvausten täytyy myös noudattaa tätä 'ekvivalenttiutta'. Katsotaan esimerkkien kautta mitä tämä aiheuttaa.

Esimerkiksi edellä ollut kuvaus

$$f_2 : \mathscr{R} \times \mathscr{D} \to \mathscr{R}; (x,d) \to f_2(x,d) = \sin(x) \tag{5}$$

ei toteuta tätä ekvivalenttiusehtoa. Jos esimerkiksi lähtöjoukko koostuu pituuksista, eli esimerkiksi $(x,d) = (5,m)$ (eli 'viisi metriä'), niin saamme

$$f_2(5,m) = \sin 5. \tag{6}$$

Toisaalta tämän pitää olla *sama kuin*

$$f_2(5.46805, jaardia) = \sin 5.46805, \tag{7}$$

mikä ei selvästikään pidä paikkaansa! (Koska $\sin 5 \neq \sin 5.46805$)

Jotta saamme kuvauksesta yksikköriippumattoman, tarvitaan funktion parametrilistaan jotakin auttaa korjaamaan yksikkömuunnoksen aiheuttaman skaalauksen, eli käytännössä tarvitsemme toisenkin pituusyksikön parametrilistaan. Esimerkiksi näin:

$$f_3 : \mathscr{R} \times \mathscr{D} \times \mathscr{R} \times \mathscr{D} \to \mathscr{R}; (x_1, d_1, x_2, d_2) \to f_2(x_1, d_1, x_2, d_2) = \sin(x_1/x_2 d_1/d_2), \qquad (8)$$

jossa d_1 ja d_2 ovat valitut pituuden yksiköt ja d_1/d_2 on yksinkertaisesti skaalauskerroin kun siirrytään pituusyksiköstä toiseen. Nyt voisimme laskea esimerkiksi

$$f_3(5, m, 1, m) = \sin(5m/m) = \sin 5, \qquad (9)$$

tai

$$f_3(5.46805, jaardia, 1, m) = \sin(5.46805 jaardia/m) = \sin 5, \qquad (10)$$

joka on siis aivan sama kuin edellä.

Lienee selvää, että emme halua fysiikassa kirjoittaa kaikkia kuvauksia ja funktioita näin monimutkaisesti, erottaen yksiköt ja lukuarvot toisistaan. Mutta jokin tämänkaltainen rakenne on siellä joka tapauksessa taustalla ja syynä tähän on yksinkertaisesti se, että yksikölliset muuttujat ovat matemaattiselta rakenteeltaan jotakin paljon monimutkaisempaa kuin yksinkertaiset luvut.

Vaatimamme yksikköriippumattomuus johtaa siihen, että potenssifunktioita lukuunottamatta kaikki kuvaukset voidaan esittää dimensiottomien parametrien avulla. Tämä on myös välttämätön vaatimus, sillä vain jos funktion parametrien dimensiot saadaan kumoamaan toisensa, voi funktio olla yksikkömuunnoksissa muuttumaton.

Esimerkiksi edellä ollut dimensiollisesti hyväksytty funktio voidaan esittää yhden parametrin funktiona

$$\tilde{f}_3 : \mathscr{R} \to \mathscr{R} : x \to \tilde{f}_3(x) = \sin x, \qquad (11)$$

missä (yksikötön) parametri x on alkuperäisen funktion f_3 parametrien (x_1, d_1) ja (x_2, d_2) suhdeluku $x_1/x_2 d_1/d_2$.

Kaikkien fysiikan yhtälöiden dimensionaalinen homogenisuus on sitten seurausta yllä olevasta matemaattisesta rakenteesta.

Se taas että potenssifunktiot x^a ovat poikkeustapaus kuvauksissa on seurausta siitä miten dimensiot käyttäytyvät kun suureita kerrotaan keskenään, eli yksinkertaisesti potenssien laskusäännöistä.

Yksiköt eivät tule tyhjästä!

On tärkeää huomata vielä yksi asia fysikaalisesti järkevien matemaattisten kuvausten parametreista: kuvaukset eivät voi luoda yksiköitä 'tyhjästä'.

Tarkastellaan esimerkkinä kurssillakin vastaan tullutta syvän veden aaltojen nopeutta. Syvässä vedessä aaltojen nopeus riippuu putoamiskiihtyvyydestä g sekä aallonpituudesta λ. Tiedämme kurssilta, että oikea dimensioanalyyttinen ratkaisu on $v(g, \lambda) = C\sqrt{g\lambda}$, missä C

on luku, jonka suuruus voidaan määrittää esimerkiksi kokeellisesti tai sopivalla fysikaalisella mallilla.

Puhtaasti dimensionaalisen homogenisuuden nojalla kuitenkin voisi kuvitella että myös seuraava relaatio olisi mahdollinen:

$$v(g,\lambda) = 1\,\mathrm{m/s}. \tag{12}$$

Eli aaltojen nopeus *ei riippuisikaan* putoamiskiihtyvyydestä tahi aallonpituudesta. Ongelmana vain on, että tämä relaatio ei itse asiassa ole kuvaus laisinkaan! Syynä on se, että oikean puolen yksiköt m ja s, eivät ole funktion parametrilistassa.

Tilanne on vähän analoginen sen kanssa, että määrittelisimme seuraavanlaisen matemaattisen relaation:

$$f : \mathscr{R} \to \mathscr{R} : x \to f(x) = \sin(x/y). \tag{13}$$

Tämä relaatio ei ole kuvaus, ja syynä on se, että oikealla puolella esiintyy muuttuja y, jota ei ole määritelty. Jos haluamme tehdä tästä oikean matemaattisen kuvaajan, pitää meidän laajentaa määrittelyjoukkoa näin:

$$f : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{R} : (x,y) \to f(x,y) = \sin(x/y), \tag{14}$$

joka on nyt ihan hyvin määritelty kuvaus (pois lukien pieni hankaluus kohdassa $y = 0$).

Samalla tavalla relaatiossa

$$v(g,\lambda) = 1\,\mathrm{m/s}. \tag{15}$$

esiintyy oikealla puolella ’metri’ ja ’sekunti’, mutta se mitä ’metri’ ja ’sekunti’ tarkoittavat on loppujen lopuksi mielivaltaista – ne ovat tiedeyhteisön keskenään valitsemia käsitteitä ja itse asiassa niiden määritelmät ovat aikojen saatossa muuttuneetkin. Kuten matemaattisessa relaatiossa edellä, myös tässä pitäisi meidän nyt sitten laajentaa määrittelyjoukkoa:

$$v(g,\lambda,l,t) = l/t, \tag{16}$$

missä $l = 1\,\mathrm{m}$ ja $t = 1\,\mathrm{s}$. Funktion $v(g,\lambda,l,t)$ kaksi viimeistä parametria eivät siis varsinaisesti ole ’vapaita muuttujia’, mutta ne tarvitaan määrittelyjoukkoon, koska niiden yksiköt *käyttäytyvät kuin muuttujat*. Ja tämä on siis seurausta siitä, että meillä on vapaus valita yksikkömme miten haluamme.

Tämä hieman keinotekoinen esimerkki toivottavasti hieman havainnollistaa sitä miten yksiköt ja suureiden lukuarvot ovat kytköksissä toisiinsa. Nämä tekijät asettavat sitten ehtoja matemaattisille funktioille: ei siksi että olettaisimme niiden olevan jotenkin hyvin käyttäytyviä tai siistejä, vaan siitä syystä että yksikölliset suureet muodostavat eräänlaisia ekvivalenssiluokkia ja fysikaalisia ilmiöitä kuvaavien relaatioiden täytyy säilyttää tämä ekvivalenssiluokkarakenne. Tätä ominaisuutta hyödynnetään dimensioanalyysissä.