

MS-A010{2,3,4,5} (SCI,ELEC\*, ENG\*)  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1  
Luento 7: Integraali ja analyysin peruslause

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

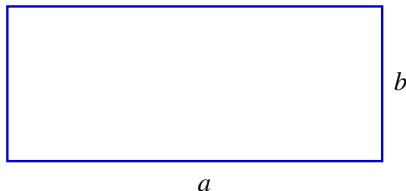
# Suorakulmion pinta-ala

Integraalilasku voidaan tulkita eräiden pinta-alojen laskemiseksi.

Aluksi tarkastellaan umpinaisten tasokäyrien rajaamien alueiden pinta-aloja ja pyritään antamaan pinta-alalle integraalien kannalta käyttökelpoinen määritelmä.

**Askel 1:** Suorakulmion pinta-ala on *kanta*  $\times$  *korkeus*:

$$A = ab.$$

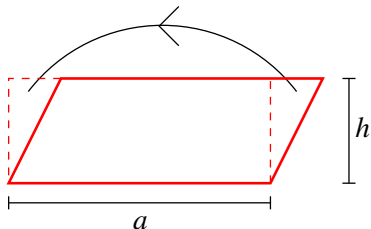


Tässä ei ole varsinaisesti ajateltu mitään matemaattisesti, vaan on hyväksytty käyttökelpoisena määritelmänä.

# Suunnikkaan pinta-ala

**Askel 2:** Suunnikkaan pinta-ala on  $kanta \times korkeus$ :

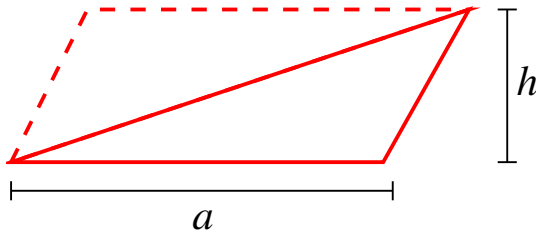
$$A = ah.$$



Ajateltu, että pinta-alan täytyy olla summautuva.

**Askel 3:** Kolmion pinta-ala on

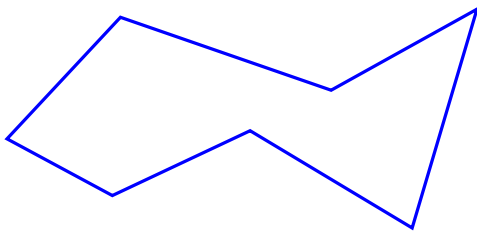
$$A = \frac{1}{2}ah.$$



Ajateltu, että yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen tulee olla samoja.

# Monikulmio

**Monikulmio** on tasoalue, jota rajaa umpinainen ja itseään leikkaamaton murtoviiva.



**Murtoviiva** koostuu peräkkäisistä janoista, joille

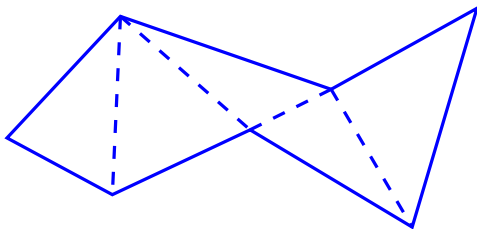
*edellisen päätepiste = seuraavan alkupiste.*

Se on **umpinainen**, jos

*viimeisen päätepiste = ensimmäisen alkupiste.*

# Umpinaisen monikulmion pinta-ala

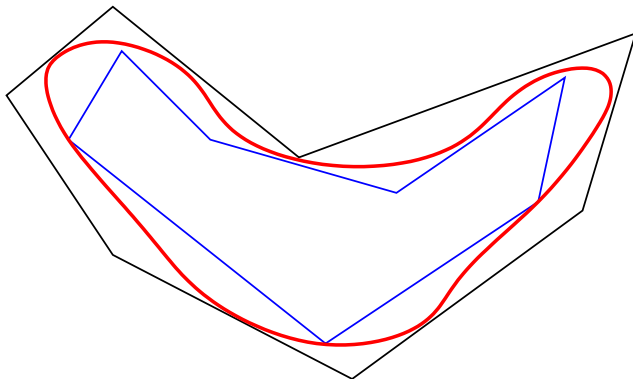
**Askel 4:** Monikulmion pinta-ala määritellään jakamalla monikulmio kolmioihin (= monikulmion kolmiointi) ja laskemalla kolmioiden pinta-alojen summa.



**Lause:** Kolmioiden pinta-alojen summa ei riipu kolmioinnin valinnasta.

# Yleisen tasojoukon pinta-ala likimäärin

**Askel 5:** Muodostetaan rajoitetulle tasalueelle  $D$  sisämonikulmioita  $M_s$  ja ulkomonikulmioita  $M_u$ :  $M_s \subset D \subset M_u$ .



Monikulmioille pätee  $A(M_s) \leq A(M_u)$  seurauksena siitä, että sama on totta sisäkkäisille kolmioille.

## Määritelmä

Rajoitetulla tasojoukolla  $D$  on pinta-ala, jos jokaista  $\varepsilon > 0$  vastaa sisämonikulmio  $M_s$  ja ulkomonikulmio  $M_u$ , joiden pinta-alojen erotus on pienempi kuin  $\varepsilon$ :

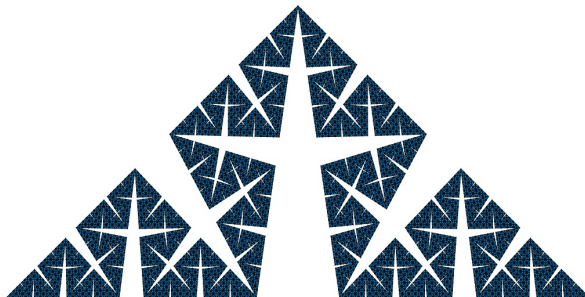
$$A(M_u) - A(M_s) < \varepsilon.$$

Tällöin kaikkien lukujen  $A(M_s)$  ja  $A(M_u)$  välissä on yksikäsitteinen reaalityö  $A(D)$ , jota kutsutaan joukon  $D$  pinta-alaksi.



# Pinta-alakäsittelen ongelmia

**Yllätys:** Vaikka joukon  $D$  reuna olisi jopa jatkuva umpinainen tasokäyrä, ei sillä aina ole pinta-alaa! Itseään leikkaamaton reunakäyrä voi olla niin "kiemurteleva", että sen "pinta-ala"  $> 0$ . Ensimmäinen esimerkki [W.F. Osgood, 1903].

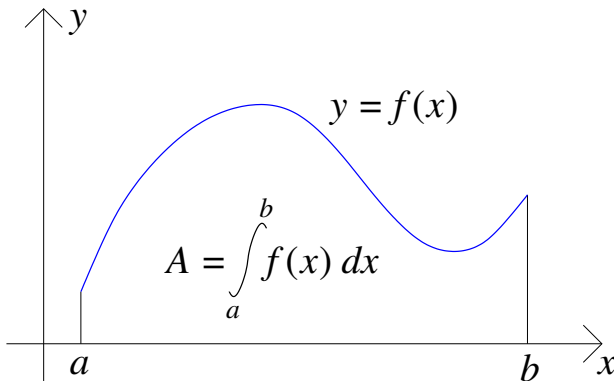


**Mandelbrotin joukko** — katso animaatioita YouTubessa!

# Määrätty integraali I

Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sellainen, että  $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [a, b]$ .

Kuinka suuren pinta-alan  $A$  käyrä  $y = f(x)$  rajaa yhdessä  $x$ -akselin kanssa välillä  $[a, b]$ , jossa ajatellaan  $a < b$ ?



# Määrätty integraali II

Kutsumme tätä pinta-alaa  $A$  (jos se on ylipäätään olemassa) **määrätyksi integraaliksi**

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Määrätty integraali on siis reaaliluku (ei funktio).

Myöhemmin havaitaan, että ehtoa  $f(x) \geq 0$  ei tarvita lainkaan.  $x$ -akselin alapuolelle jäävä pinta-ala voidaan ymmärtää negatiivisena.

# Määrätty integraali III

- Tällä kurssilla integraali määritellään kaikille paloittain jatkuville funktioille. **Paloittainen jatkuvuus tarkasti hetken päästä.**
- Yleisemmin integraalia voidaan tutkia myös rajoitettujen funktioiden tapauksessa, jolloin puhutaan **Riemann-integraalista**.
- Paloittain jatkuvat funktiot ovat **Riemann-integroituvia** kuten hetken päästä määritellään.
- Ikävä kyllä, kaikki rajoitetut funktiot eivät ole Riemann-integroituvia. Tämä hankaloittaa yleisen tapauksen käsittelyä.

# Jatkuvan funktion integraali I

Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuva, jossa  $a < b$ . Välin  $[a, b]$  **jakoon** eli **ositukseen**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

liittyy sitä vastaava funktion  $f$  **yläsumma**

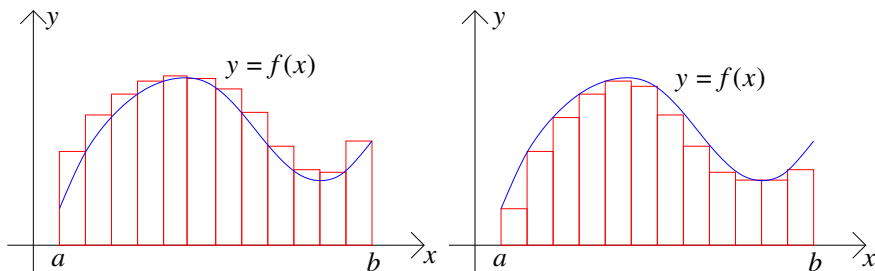
$$S = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}), \quad M_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

ja **alasumma**

$$s = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \quad m_k = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Nämä ovat positiivisen funktion tapauksessa erään ulko- ja sisämonikulmion (= pylväsdiagrammit) pinta-aloja.

# Jatkuvan funktion integraali II



Punaisten pylväiden pinta-alojen summa on (tasavälistä jakoa vastaava) yläsumma  $S$  vasemmanpuoleisessa kuvassa ja alasumma  $s$  oikeanpuoleisessa kuvassa.

Aina pätee:

- (i) Kun jakopisteitä lisätään (sanotaan: jakoa tihennetään), niin  $s$  kasvaa ja  $S$  pienenee;
- (ii)  $s \leq S$ , vaikka ne laskettaisiin eri jakopisteillä.

**Perustelu:** (i) Kuviosta (tai muulla tavoin) nähdään, miten ala- ja yläsumma muuttuvat, kun lisätään yksi jakopiste. **Piirrä!**

(ii) Jos ylä- ja alasumman laskemiseen käytetään samoja jakopisteitä, niin väite on selvä, koska  $m_k \leq M_k$  kaikilla  $k$ . Jos jakopisteet eivät ole samat, niin tarkastellaan tihennettyä jakoa ottamalla mukaan molempien jakojen kaikki pisteet. Tämän jälkeen väite seuraa kohdasta (i).

# Integraalin määritelmä

## Määritelmä

Positiivinen funktio  $f$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ , jos jokaista  $\varepsilon > 0$  vastaa sellainen jako, jossa

$$S - s < \varepsilon.$$

Funktion  $f$  integraali  $I \in \mathbb{R}$  on tällöin se yksikäsitteinen luku, jolle  $s \leq I \leq S$  kaikissa jaoissa; merkitään

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

**Positiivisen funktion tapauksessa** tämä vastaa täsmälleen sitä vaatimusta, että jakoihin liittyvien pylväsdiagrammien avulla lasketut ulko- ja sisämonikulmioiden pinta-alat saadaan "mielivaltaisen" lähelle toisiaan, kun jakoa tihennetään riittävästi.

**Mikä tulee ongelmaksi, jos funktio ei olekaan positiivinen?**



# Sopimuksia I

Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jossa  $a < b$  ja  $f(x) \geq 0$ .

Laajennetaan integraalimerkin käyttöä tekemällä seuraavat sopimukset:

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x) dx &= 0, \\ \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b (-f(x)) dx &= - \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Viimeinen sopimus mahdollistaa negatiivisten funktioiden integroimisen.

Näiden sopimusten nojalla pätee

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

kaikilla  $a, b, c$  järjestyksestä riippumatta **Piirrä kuvio!**.

Lisäksi voimme integroida **sekä** positiivisia **että** negatiivisia arvoja saavuttavia funktiota määrittelemällä

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx + \int_a^b f_-(x) dx$$

jossa  $f_+(x) = \max(f(x), 0)$  ja  $f_-(x) = \min(f(x), 0)$ .

## Lause

*Integraali on määritelty kaikille jatkuville funktioille ja se voidaan laskea raja-arvona*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

*käyttämällä tasavälisiä jakopisteitä  $x_k = a + k\Delta x$ , jossa  $\Delta x = (b - a)/n$  on askelpituus ja  $0 \leq k \leq n$ .*

**Yleisemmin:** Edellisessä summassa arvon  $f(x_k)$  tilalla voi olla mikä tahansa arvo  $f(z_k)$ , kun  $x_{k-1} \leq z_k \leq x_k$ , eikä jaon tarvitse olla tasavälinen.

**Ainoa vaatimus:** Jakovälien max-pituus  $\rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Tässä tapauksessa puhutaan integraalin laskemisesta **Riemannin summien** avulla.

## Määritelmä

Funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m \leq b,$$

joissa kaikissa toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja äärellisiä (ts.  $\pm\infty$  ei sallita).

Määritelmästä seuraa, että jokaisella yksittäisellä välillä  $[c_{k-1}, c_k]$  funktio  $f$  voidaan muokata jatkuvaksi muuttamalla päätepistearvoiksi ko. toispuoliset raja-arvot.

## Määritelmä

Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on paloittain jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x) dx,$$

kun käytetään edellisen sivun merkintöjä,  $c_0 = a$ ,  $c_{m+1} = b$  ja  $f$  tulkitaan jatkuvaksi jokaisella välillä  $[c_{k-1}, c_k]$  erikseen.

Käytännössä integraalin laskeminen täytyy tehdä useammassa osassa yllä olevan kaavan tapaan myös silloin, kun funktio  $f$  on määritelty paloittain joko epäyhtenäisellä integroimisalueella tai eri kaavoin eri osa-alueissa (jatkuvuudesta riippumatta).

Paloittain jatkuvien funktioiden integraalille pätee

- Lineaarisuus: Jos  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , niin

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

- Positiivisuus: Jos  $h(x) \geq 0$  kaikilla  $x$ , niin  $\int_a^b h(x) dx \geq 0$ .

- Seuraus:  $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

- Erityisesti: Koska  $\pm f(x) \leq |f(x)|$ , niin

$$\pm \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

## Lause

Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \text{ jollakin } c \in [a, b], \text{ ts.}$$

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = \bar{f} = \text{funktion } f \text{ keskiarvo välillä } [a, b].$$

**Perustelu:** Tehdään taululla.

Mihin tarvitaan jatkuvuutta? Riittäisikö paloittainen jatkuvuus?

## Lause

**Analyysin peruslause:** Jos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

kaikilla  $x \in ]a, b[$ .

**Perustelu:** Tehdään taululla lähtien erotusosamäärästä.