MS-A010{2,3,4,5} (SCI,ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 9: Integroimismenetelmät

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Integroimismenetelmiä

Helpoimmat integraalit voi laskea suoraan peruskaavoja käyttämällä. Osa hankalammista tapauksista palautuu näihin, jos integraalista onnistuu tunnistamaan "sisäfunktion derivaatan".

Systemaattisempia menetelmiä ovat

- osittaisintegointi,
- sijoitusmenetelmä, ja
- osamurtohajotelmat.

Osittaisintegrointi ja sijoitusmenetelmä (eli muuttujanvaihtomenetelmä) ovat tulon derivoimissäännön ja ketjusäännön soveltamista "takaperin".

Lopuksi vilkaistaan numeerista integrointia.

Osittaisintegrointi I

Lause

Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia funktioita välillä $[a, b]$ (eli käytännössä hieman suuremmalla avoimella välillä). Tällöin

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Vastaavasti integraalifunktioille pätee

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Perustelu: Tulon derivoimissääntö, integrointi ja termien ryhmittely.
Idea: Toimii silloin, kun funktion $f(x)g'(x)$ integrointi on helpompaa kuin alkuperäisen funktion $f'(x)g(x)$.

Osittaisintegrointi II

Esimerkki

Laske integraali

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Kokeillaan osittaisintegrointia ja valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = -\cos x$ ja $g'(x) = 1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x \, dx &= \Big/_{0}^{\pi} (-\cos x) \cdot x - \int_0^\pi (-\cos x) \cdot 1 \, dx \\ &= -\pi \cos \pi + 0 + \Big/_{0}^{\pi} \sin x = \pi. \end{aligned}$$

Huom: Jos f ja g valitaan esimerkissä toisin päin, niin osittaisintegrointi johtaa entistä hankalampaan integraaliin.

Osittaisintegrointi III

Esimerkki

Laske integraalifunktio

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = e^x$ ja $g(x) = \sin x$. Taululla.

Esimerkki

Laske integraali

$$\int xe^{-x} \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = e^{-x}$ ja $g(x) = x$. Taululla.

Osittaisintegrointi IV

Esimerkki

Laske integraalifunktio

$$\int x \ln x \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = x$ ja $g(x) = \ln x$. Taululla.

Osittaisintegroinnissa on strategisena ideana valita funktioksi g sellainen osa integrandissa, että muodostettaessa g' mahdollisimman paljon pahuutta poistuu integraalimerkin alta.

Sijoitusmenetelmä I

Lause

Jos f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du,$$

kun $A = g(a)$, $B = g(b)$.

Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a) = A$, $x = b \Rightarrow u = g(b) = B$.
Huomaa, että sijoituksen jälkeen **ei tarvitse** enää palata alkuperäiseen muuttujaan x (paitsi integraalifunktiota laskettaessa; kts. alla).

Sijoitusmenetelmä II

Muunnos $u = g(x)$ voidaan (usein) kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$\begin{aligned} x &= g^{-1}(u) \Rightarrow \\ dx &= (g^{-1})'(u)\,du = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(u)\big)}\,du = \frac{1}{g'(x)}\,du, \end{aligned}$$

joten tulos on sama kuin aikaisemmin.

Integroimisrajojen vaihtaminen on helpompaa alkuperäistä muunnosta $x \mapsto u$ käyttämällä.

Sen sijaan differentiaalin muuttuminen $dx \mapsto du$ on joskus helpompi laskea yllä annetun käänteisen muodon avulla.

Sijoitusmenetelmä III

Esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$.

Ratkaisu: Neliöjuuren hävittämiseksi sijoitetaan $x = t^2$, kun $t \geq 0$.

Tällöin $dx = 2t\,dt$ ja käänteisestä muodosta $t = \sqrt{x}$ saadaan: Kun $x = 0$, niin $t = \sqrt{0} = 0$; kun $x = \pi^2$, niin $t = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = 2\pi.$$

(Viimeinen integraali laskettiin aikaisemmassa esimerkissä osittaisintegroimalla)

Sijoitusmenetelmä IV

Myös integraalifunktio voidaan usein laskea sijoitusmenetelmän avulla.

Tällöin säästytään integroimisrajojen muuttamiselta, mutta joudutaan palaamaan uudesta muuttujasta t takaisin alkuperäiseen muuttujaan x.

Esimerkki

Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Ratkaisu: Sijoitetaan $x = t^2$, $t > 0$, eli $t = \sqrt{x}$, jolloin saadaan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

Osamurtohajotelma I

Kaikki reaalikertoimiset rationaalifunktiot $R(x) = P(x)/Q(x)$ voidaan integroida osamurtohajotelmien avulla.

Ensimmäinen vaihe: Jakokulmassa jakamalla (tai muuten) palautetaan tilanne siihen, että $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} &= \frac{(x+1)-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \\
\frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}
\end{aligned}$$

Osamurtohajotelma II

Osamurtohajotelmaa voidaan käyttää integroinnissa seuraavalla tavalla.

Esimerkki

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Toinen vaihe: Jaetaan nimittäjässä oleva polynomi $Q(x)$ joko 1. tai 2. asteen reaalikertoimisiin tekijöihin.

Reaalijuurisessa tapauksessa tarvitaan vain helpointa tulosta

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kun kertoimet A, B valitaan sopivalla tavalla.

Osamurtohajotelma III

Esimerkki

Muodosta lausekkeen $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x+5)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Hajotelma on muotoa

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(x-4)(x+5)$, jolloin saadaan

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-4).$$

Kertoimet A ja B saadaan tästä kahdella eri tavalla:
Tapa 1: Sijoitetaan vuorotellen $x = 4$ tai $x = -5$.
Tapa 2: Verrataan x:n potenssien kertoimia yhtälön eri puolilla.
Molempien tapojen tuloksena saadaan $A = 11/9$ ja $B = 7/9$.

Osamurtohajotelma IV

Esimerkki

Integroi rationaalilauseke $\dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$.

Ratkaisu: Nyt nimittäjän nollakohdat eivät ole reaalisia, joten ei yritetä pilkkoa sitä ensimmäisen asteen tekijöihin (vaikka se olisi mahdollista kompleksiluvuilla). Sen sijaan täydennetään neliöksi. Taululla.

Numeerinen integrointi* I

Hankalien integraalien likiarvoja voidaan joskus laskea kehittämällä integrandi Taylor-polynomiksi. Tämä edellyttää kuitenkin sitä, että integroitava funktio on annettu jonkin lausekkeen avulla, jota osataan derivoida.

Mittausdatassa funktiosta tunnetaan vain sen arvot tietyissä pisteissä $y_k = f(k\Delta x)$, ja derivaatoista ei oikein ole tietoa. Toivotaan, että funktio f ei kerrassaan vallan villiydy samplauspisteiden $k\Delta x$, $k \in \mathbb{N}$, välissä, tai kaikki toivo on mennyttä.

Rauhallisesti käyttäytyvissä tapauksissa integraali (reaaliluku) voidaan laskea likimääräisesti numeerisilla menetelmillä, kvadratuureilla.

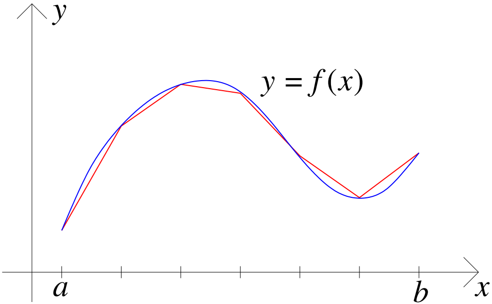
Eri kvadratuurit poikkevat toisistaan tarkkuuden ja laskentatyömäärän kannalta, sekä sen kannalta, mitä ne edellyttävät funktiolta f.

Numeerinen integrointi* II

- Yksinkertaisin tapa on puolisuunnikassääntö eli trapetsikaava, jossa funktion kuvaajaa approksimoidaan murtoviivalla:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

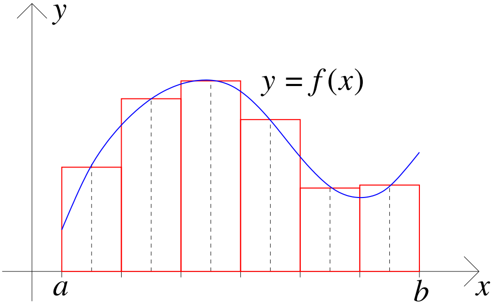
jossa $h = (b-a)/n$ on askelpituus, $n \in \mathbb{N}$ jakovälien lukumäärä, $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, ovat jakopisteet ja $y_k = f(x_k)$.



Numeerinen integrointi* III

- Keskipistesääntö ("pylväsdiagrammiapproksimaatio")

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)), \\
m_k &= (x_{k-1} + x_k)/2,
\end{aligned}
$$



Numeerinen integrointi* IV

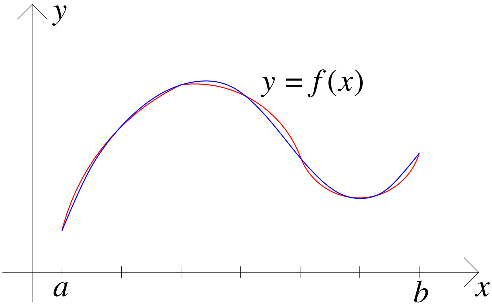
- Sileämmille funktioille f Simpsonin sääntö

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

tuottaa tarkemman lopputuloksen samalla jakovälien lukumääräällä n.

Simpsonin säännössä funktiota ensin interpoloidaan 2. asteen polynomilla kahdella peräkkäisellä jakovälillä. Tämän takia jakovälien lukumäärän n täytyy olla parillinen.

Numeerinen integrointi* V



Hienommissa kvadratuureissa (Gaussin kvadratuuri, Gauss-Lobatto, jne.) jakovälitkään eivät enää ole yhtä pitkiä, vaan jakoa tihennetään kohdissa, jossa funktion heilahtelu on suurta ja/tai ollaan lähellä välin päätepistettä.

Esimerkki

Laske kaarenpituus käyrälle $y = \ln(1+x^2)$ kun $1 \le x \le 2$.

Etsitty kaarenpituus on

$$I = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\, dx,$$

joka näyttää aivan hirmuiselta integrointitehtävältä. Ratkaistaan se likimääräisesti Simpsonin menetelmällä MATLAB-koodilla:

```
function [I,x,y] = simpson(n,a,b)
% Weapon of Choice: MATLAB R2017b.
% J. Malinen/8.10.2021 for DiffInt1

% The function to be integrated
f=@(x) sqrt(1 + (4*x.^2)./((1+x.^2).^2));
```

Numeerinen integrointi* VII

```
% Subdivisions of the integration interval
h = abs(b-a)/n; x = a:h:b; m = size(x); m = m(2);

% Create Simpson's coefficients [1 4 2 4 ... 4 1]
c = zeros(1,m); c(1) = 1; c(m) = 1;
for i=2:m-1
  if mod(i,2)==1
     c(i) = 2;
  else
     c(i) = 4;
  end
end

% Compute the function values and the integral
y = f(x); I = (h/3)*c*y';
```

Numeerinen integrointi* VIII

Saadaan $n = 10000$ jakovälillä näin:

```
>> [I x y] = simpson(10000,1,2); I
I =
   1.357105534751387
```

Kokeilemalla isompia arvoja n:lle näyttäisi, että kahdessa viimeisessä desimaalissa vaikuttaisi olevan epävarmuutta.

Ken joutuu numeerisesti integraalin tietokoneella laskemaan, tutustukoon asiaan tarkemmin wikipedian ja kirjallisuuden avulla.