MS-A010{2, 3,4,5} (ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 6: Alkeisfunktioista

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Funktio I

Kertauksena ja muistutuksena:

- Funktio $f\colon A \to B$ on relaatio, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a täsmälleen yhden B:n alkion b. Merkitään $b = f(a)$.
- Tässä $A = M_f$ on f:n **määrittelyjoukko** ja B on f:n **maalijoukko**.
- Funktion f **arvojoukko** (eli kuvajoukko) on B:n osajoukko $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.
- Jos funktion määrittelyjoukko $A \subset \mathbb{R}$, niin kyseessä on yhden muuttujan funktio.

Funktio II

Esimerkkejä:

- Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, maalijoukko on $\mathbb{R}$, mutta sen arvojoukko on $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$.
- Edellisen esimerkin funktio voidaan toki määritellä suoraan muodossa $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$, jolloin arvojoukko on sama kuin maalijoukko.
- Maalijoukko ja arvojoukko voidaan periaatteessa määritellä samaksi kaikkien funktioiden kohdalla, mutta se ei yleensä olet tarpeellista tai varsinkaan käytännöllistä.

  Yritä löytää esimerkiksi funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + x^2 + x$ arvojoukko.

Käänteisfunktio I

Funktio $f\colon A \to B$ on

- **injektio**, jos eri pisteissä saadaan eri arvot, ts.
  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ts.
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- **surjektio**, jos arvojoukko on sama kuin maalijoukko, ts. $f(A) = B$.
- **bijektio**, jos se on sekä injektio että surjektio.

Kysymys on siis yhtälön $y = f(x)$ ratkaisujen x lukumäärästä. Jos jokaiselle $y \in B$ on olemassa

- korkeintaan yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on injektio;
- vähintään yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on surjektio;
- täsmälleen yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on bijektio.

Huom: Funktiosta voidaan tehdä aina surjektio, jos sen maalijoukko kutistetaan arvojoukoksi jättämällä pois ylimääräiset pisteet.

Käänteisfunktio II

Jos $f\colon A \to B$ on bijektio, niin sillä on **käänteisfunktio** $f^{-1}\colon B \to A$, joka määritelty ehdolla

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

- Käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(f(a)) = a$ kaikilla $a \in A$ ja $f(f^{-1}(b)) = b$ kaikilla $b \in B$.
- Yhdistetyn kuvauksen notaatiolla $f^{-1} \circ f = Id_A$ ja $f \circ f^{-1} = Id_B$, jossa $Id_A(x) = x$ kaikilla $x \in A$, ja jossa $Id_B(x) = x$ kaikilla $x \in B$.
- Huomaa, että $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.
- Jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ on aidosti monotoninen, niin surjektiolla $f\colon A \to f(A)$ on käänteisfunktio.

Käänteisfunktio III

Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

Perustelu: Piste (a, b) on funktion f kuvaajalla $\Leftrightarrow$

$$b = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad a = f^{-1}(b)$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{piste } (b, a) \text{ on funktion } f^{-1} \text{ kuvaajalla.}$$

Lisäksi koordinaattien vaihto-operaation $(a, b) \mapsto (b, a)$ geometrinen tulkinta on peilaus suoran $y = x$ suhteen.

Voidaan ymmärtää piirtoheitinkalvon tai voipaperin avulla, katsomalla funktion kuvaajaa "nurjalta puolelta".

Intuitiivinen seuraus: Jos $f : A \to f(A)$ jossa A on väli ja f on jatkuva, niin myös f^{-1} on jatkuva joukossa $f[A]$.

Käänteisfunktio IV

Funktion $f\colon\ ]a,b[\,\to\,]c,d[$ derivoituvuus heijastuu käänteisfunktioon f^{-1}.

Idea: Funktion f (tai f^{-1}) derivoituvuus tarkoittaa sen kuvaajalla ei-pystysuoran tangentin olemassaoloa kussakin määrittelyjoukon pisteessä.

Johtopäätös: Jos f on derivoituva, f^{-1} on olemassa, ja $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin silloin f^{-1} on derivoituva.

Nähdään todeksi katsomalla funktion f kuvaajaa ja sen erästä tangenttia piirtoheitinkalvon "nurjalta puolelta", jolloin se muuttuu f^{-1}:n kuvaajaksi ja vastaavaksi tangentiksi.

Derivointikaava: Jos $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, niin

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

missä $f'(f^{-1}(x)) =$ funktion f derivaatta laskettuna pisteessä $f^{-1}(x)$.

Mistä tämä kaava tulee?

Trigonometriset funktiot I

- Kulman yksikkö radiaani = rad: kulmaa vastaavan yksikköympyrän osan kaarenpituus.
- π rad = 180 astetta, ts. 1 rad = $180/\pi \approx 57{,}3$ astetta
- Funktiot $\sin x$, $\cos x$ määritellään yksikköympyrän avulla niin, että $(\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$, on yksikköympyrän parametrisointi kaarenpituuden x avulla.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \ (x \neq \pi/2 + n\pi), \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \ (x \neq n\pi) \end{aligned}$$

- Jaksollisuus:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \ \cos(x + 2\pi) = \cos x, \\ \tan(x + \pi) &= \tan x. \quad \text{Nota bene!} \end{aligned}$$

Trigonometriset funktiot II

- Alkeellisia ominaisuuksia (perustelut yksikköympyrästä):
  - $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ ja $\cos 0 = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$
  - sin ja tan ovat parittomia funktioita, cos on parillinen:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x, \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- Yhteenlaskukaavat (perustelu kompleksiluvuilla tai matriiseilla):

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

- Derivaatat (johdettu aiemmin luennolla):

$$D(\sin x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\sin x$$

arcus-funktiot I

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.
- Sini-funktio
$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$
on aidosti kasvava bijektio.
- Kosini-funktio
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
on aidosti vähenevä bijektio.
- Tangentti-funktio
$$\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$$
on aidosti kasvava bijektio.

arcus-funktiot II

- Käänteisfunktiot:

$$\begin{aligned} \text{arctan} &: \quad \mathbb{R} \to \,]-\pi/2, \pi/2[, \\ \text{arcsin} &: \quad [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2], \\ \text{arccos} &: \quad [-1,1] \to [0,\pi] \end{aligned}$$

- Siis:

$$\begin{aligned} x &= \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arctan x, \quad \text{kun } \alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[\\ x &= \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \quad \text{kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] \\ x &= \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos x, \quad \text{kun } \alpha \in [0,\pi] \end{aligned}$$

- Huom: arc$***$ annetaan **radiaaneissa**, ellei...

- Käänteisfunktioiden derivaatat

$$
\begin{aligned}
D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \; x \in \mathbb{R} \\
D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; -1 < x < 1 \\
D \arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \; -1 < x < 1
\end{aligned}
$$

Perustelu: Derivoimalla puolittain yhtälö $\tan(\arctan x) = x$, kun $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\big(1 &+ \tan^2(\arctan x)\big) \cdot D(\arctan x) = Dx = 1 \\
&\Rightarrow \quad D(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}
$$

jossa $\tan^2(\arctan x) = (\tan(\arctan x))^2 = x^2$.

Eksponenttifunktio I

- Neperin luku

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$
$$\approx 2{,}718281828459\ldots$$

- Eksponenttifunktio exp Taylor-sarjansa avulla:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys?

Eksponenttifunktio II

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys pääpiirteissään:

- Määritellään $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sarjakehitelmällä

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

  Sarja suppenee suhdetestin perusteella kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja $\exp(0) = 1$.

- **Osoitetaan:** exp on derivoituva ja toteuttaa differentiaaliyhtälön $\exp'(x) = \exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Sarjan derivoiminen termeittäin on koko päättelyn **matemaattisesti** hankalin kohta, vaikka intuitiivisesti helppo ymmärtää.)

- Differentiaaliyhtälönsä perusteella toteuttaa myös

$$\exp(-x) = 1/\exp(x) \text{ ja } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

  kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.... (jälkimmäinen taululla jos aikaa!)

Eksponenttifunktio III

- ...josta seuraa, että $\exp(p/q) = (\exp(1))^{p/q}$ kaikille rationaaliluvuille $p/q \in \mathbb{Q}$...
- ... mistä jatkuvuuden (koska derivoituva) perusteella

$$\exp(x) = (\exp(1))^x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

- Koska binomikaavalla saadaan helpompi punainen yhtäsuuruusmerkki kaavaan

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

niin eksponenttifunktiolle tulee lopulta muotoon $\exp(x) = e^x$.

Jatkossa väliaikainen notaatio $\exp(x)$ voidaan unohtaa kokonaan.

Eksponenttifunktio IV

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys johti seuraaviin tuttuihin laskulakeihin:

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $D(e^x) = e^x$
- $e^{-x} = 1/e^x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^x e^y = e^{x+y}$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Lisäksi $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava, ei-negatiivinen surjektio $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, joten sillä on käänteisfunktio $f^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

Logaritmi I

- **Logaritmifunktio** = eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$$\ln\colon \ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$$

- Tarkasti ottaen kyseessä on e-kantainen eli **luonnollinen** logaritmi. Yleisen a-kantaisen logaritmin määritelmä perustuu kaavaan

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

  kun $a > 0$ ja $y > 0$.

- Muita sovelluksissa esiintyviä logaritmeja ovat Briggsin 10-kantainen logaritmi $\lg x = \log_{10} x$ ja binäärilogaritmi $\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$.
- Merkinnällä $\log x$ tarkoitetaan (nykyään) yleensä (esim. tietokoneohjelmissa) luonnollista logaritmia $\ln x$.

Logaritmi II

Logaritmin ominaisuuksia

- $e^{\ln x} = x$, kun $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\ln(a^b) = b \ln a$, kun $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, kun $a, b > 0$
- $D \ln |x| = 1/x$, kun $x \neq 0$

Nämä seuraavat vastaavista exponenttifunktion ominaisuuksista.

Hyperboliset funktiot I

- Hyperbolinen sini *sinus hyperbolicus* sinh, hyperbolinen kosini *cosinus hyperbolicus* cosh ja hyperbolinen tangentti tanh:

$$
\begin{aligned}
\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh\colon \mathbb{R} \to [1,\infty[,\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh\colon \mathbb{R} \to\ ]-1,1[,\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}
$$

- Derivaatat: $D\sinh x = \cosh x,\ D\cosh x = \sinh x.$

Miksi?? Mitä hyötyä näistä funktioista on?

Hyperboliset funktiot II

Hyperboliset funktiot III

- Kaikilla trigonometrisilla kaavoilla on hyperbolinen vastine, joka seuraa yhteyksistä

$$\sinh(ix) = i \sin x \quad \text{ja} \quad \cosh(ix) = \cos x,$$

jossa $i^2 = -1$.

Seuraavat Eulerin kaavasta myöhemmin tällä kurssilla!

Siksi erityisesti $\sin^2$-termien merkki vaihtuu kaavoissa. Esimerkiksi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Hyperboliset funktiot IV

- Hyperboliset käänteisfunktiot eli area-funktiot; area ja lyhenne ar viittaa käänteisfunktioiden geometriseen tulkintaan eräänä hyperbeliin liittyvänä pinta-alana:

$$
\begin{aligned}
\sinh^{-1} x &= \text{ar } \sinh x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \ x \in \mathbb{R} \\
\cosh^{-1} x &= \text{ar } \cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \ x \geq 1
\end{aligned}
$$

- Käänteisfunktioiden derivaatat:

$$
\begin{aligned}
D \sinh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R} \\
D \cosh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1
\end{aligned}
$$