MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 3: Jatkuvuus

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Funktiot

Käsitellään reaaliakselin osajoukoissa määriteltyjä funktioita $f: A \to \mathbb{R}$. Useimmiten funktion määrittelyjoukko $M_f = A$ on jokin väli.

- **Avoin väli:** $]a, b[$ tai $]a, \infty[$ tai $]-\infty, b[$ tai $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$. Avoimia välejä merkitään joskus myös kaarisulkujen avulla.
- **Suljettu väli:** $[a, b]$.
- **Puoliavoimet välit:** muotoa $[a, b[$ tai $]a, b]$.
- Merkintöjä yksinkertaistava sopimus: $[a, b]$ tarkoittaa aina suljettua väliä, jonka päätepisteet ovat $a, b \in \mathbb{R}$ riippumatta siitä, mikä on lukujen a ja b suuruusjärjestys. Samoin muiden välien kohdalla.

Jatkuvuus I

Epämuodollisesti sanottuna funktio f on jatkuva pisteessä a mikäli $f(a+h) \approx f(a)$ kun häiriö $h \approx 0$.

Matemaattisemmin:

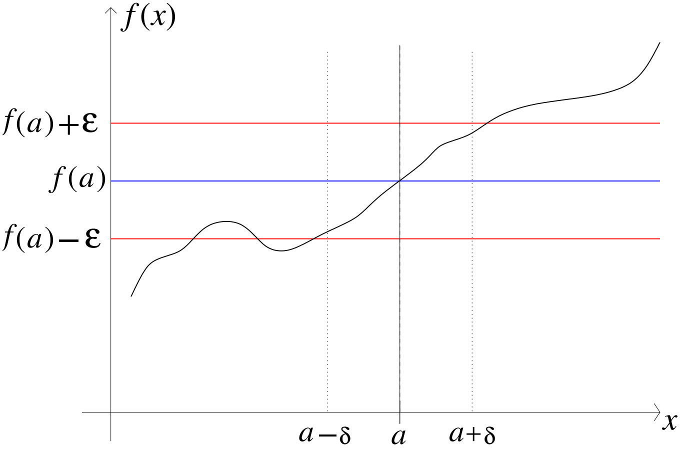
Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on **jatkuva pisteessä** $a \in A$, kun pätee:
Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta.$$

Määritelmän idea: Kun ε pienenee, niin $\delta = \delta_\varepsilon$ pienenee (jos jatkuvuus voimassa).
Muista: Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin lauseke $|a - b|$ on pisteiden ($=$ lukujen) a ja b välinen etäisyys.

Jatkuvuus II



Jatkuvuus III

- Usein funktion määrittelyjoukko A on jokin väli. Tällöin jatkuvuutta voidaan tutkia määritelmän avulla myös väliin kuuluvassa päätepisteessä; ehto $x \in A$ on olennainen.
- Jos f on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä, niin se on **jatkuva joukossa** A (tai lyhyesti: jatkuva).
- Funktion jatkuvuus voidaan määritellä yhtäpitävästi myös jonojen avulla.

  Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in A$, täsmälleen silloin, kun pätee:

  Jos jonolle (a_n) on voimassa $a_n \in A$ kaikilla n ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin silloin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
- Jonojen avulla kirjoitettuna jatkuvuus tarkoittaa siis yhtälöä

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big).$$

Jatkuvuus IV

Jatkuvia funktioita ovat esimerkiksi

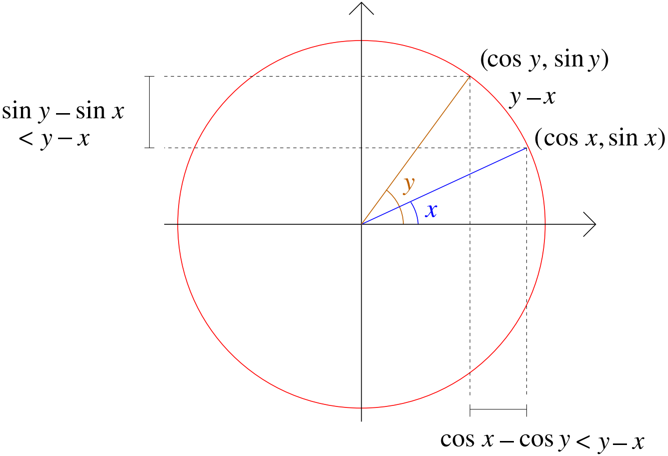
- polynomit: $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$;
- rationaalifunktiot: $R(x) = P(x)/Q(x)$, kun P ja Q ovat polynomeja;
- juurifunktiot: $f(x) = x^{p/q}$, kun $x \geq 0$;
- trigonometriset funktiot sin, cos, tan ja cot;
- jatkuvien funktioiden summat, tulot ja osamäärät (määrittelyjoukko!);
- jatkuvien funktioiden yhdistetyt funktiot.

Perustelut suoraviivaisia, kun jatkuvuutta tutkitaan edellisen sivun jono-version avulla: tulokset palautuvat jonojen raja-arvojen ominaisuuksiin.

Onko funktio $f(x) = 1/x$ jatkuva?

Jatkuvuus V

Sinin ja kosinin jatkuvuus geometrisesti yksikköympyrän avulla.



Maksimi ja minimi

Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$. Funktiolla f on pisteessä $a_0 \in A$

- **maksimi** eli suurin arvo, jos $f(a) \leq f(a_0)$ kaikilla $a \in A$. Merkitään
$$\max\{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{tai} \quad \max_{x\in A} f(x).$$
- **minimi** eli pienin arvo pisteessä $a_1 \in A$, jos $f(a) \geq f(a_1)$ kaikilla $a \in A$. Merkitään
$$\min\{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{tai} \quad \min_{x\in A} f(x).$$

Muuttujan arvot a_0 ja a_1 ovat funktion f **ääriarvokohtia**. Funktion arvot $f(a_0)$ ja $f(a_1)$ ovat funktion **ääriarvot**.

Tärkeimmät perustulokset

Nämä kolme intuitiivista faktaa on aina osattava:

- Suljetulla välillä I määritellyllä jatkuvalla funktiolla on maksimi ja minimi joissakin välin pisteissä.
- Jatkuvien funktioiden väliarvolause: Suljetulla välillä I määritelty jatkuva funktio saa kaikki arvot, jotka ovat sen minimin ja maksimin välissä. Toisin sanoen: Funktion arvojoukko $f[I] = \{f(x) \mid x \in I\}$ on myös suljettu väli.
- Bolzanon merkinvaihtolause: Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(a)f(b) < 0$, niin funktiolla f on nollakohta avoimella välillä $]a, b[$.

Matemaattiset todistukset ohitetaan. Ne perustuvat olennaisesti reaalilukujen täydellisyysaksioomaan.

Miksi reaalilukujen täydellisyys on tärkeää?
Ajattele funktiota $\sin : \mathbb{Q} \to [-1, 1]$ väliarvolauseen kannalta.

Funktion raja-arvo

- Jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $f : A \to \mathbb{R}$, niin f:n käyttäytymistä pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ lähellä voidaan tutkia myös funktion arvosta $f(x_0)$ välittämättä; ei edes tarvitse olla $x_0 \in A$. Tällöin on kyseessä funktion f raja-arvo pisteessä x_0.
- Nyt raja-arvo määritellään vain pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$, joille jokainen väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä, vaikka $\delta > 0$ olisi kuinka pieni tahansa. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokainen väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sisältää ainakin yhden pisteen $a \in A$, $a \neq x_0$.
- Tällaisia pisteitä x_0 kutsutaan määrittelyjoukon A kasautumispisteiksi, joiden ei tarvitse olla itse joukon A pisteitä.

Jatkossa oletetaan, että x_0 on kasautumispiste, esimerkiksi avoimen välin päätepiste.

Funktion raja-arvo I

Määritelmä

Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on **raja-arvo** L joukon A **kasautumispisteessä** $x_0 \in \mathbb{R}$, jos pätee: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \varepsilon \;\text{ aina, kun } x \in A \;\text{ ja }\; 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin merkitään

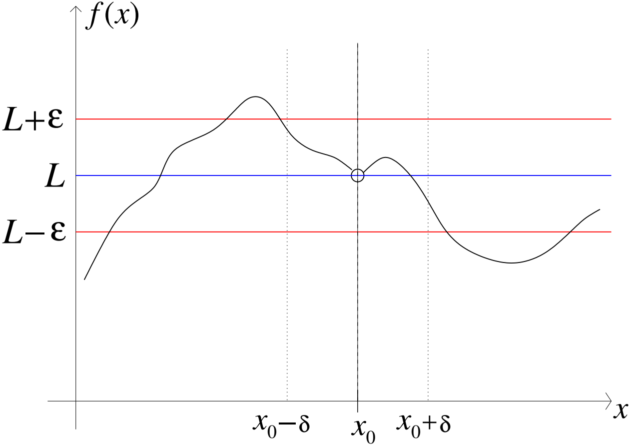
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Huomaa: Ehdon $0 < |x - x_0|$ ainoa tarkoitus on rajata mahdollinen funktion oma arvo $f(x_0)$ pois käsittelystä; ts. ehtoa tutkitaan vain tapauksessa $x \neq x_0$.

Tämä on tärkeää, koska halutaan sallia tilanne jossa $L \neq f(x_0)$.

Funktion raja-arvo II

Idea: Mitä pienempi $\varepsilon > 0$ on annettu, sitä pienempi $\delta > 0$ täytyy valita; onnistuu aina, jos raja-arvo on olemassa.



Toispuoleiset raja-arvot

Vastaavalla tavalla saadaan myös **toispuoleiset raja-arvot**

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x),$$

kun epäyhtälö $0 < |x - x_0| < \delta$ korvataan epäyhtälöllä $0 < x - x_0 < \delta$ tai $0 < x_0 - x < \delta$. Nämä voidaan tulkita myös tavallisen raja-arvon erikoistapauksina, kun funktion määrittelyjoukoksi muutetaan $A \cap \,]x_0, \infty[$ tai $A \cap \,]-\infty, x_0[$.

Lause

Jos funktio f on määritelty joukossa $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, niin raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

on olemassa täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = L.$$

Laskusääntöjä

Lause

Jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad ja \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b,$$

niin

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b, \ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab, \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b};$$

viimeisen kohdalla oletetaan $b \neq 0$ (jolloin $g(x) \neq 0$ pisteen x_0 "lähellä").

Vastaavat tulokset ovat voimassa myös toispuoleisille raja-arvoille.

Funktion raja-arvon suppiloperiaate I

Lause

Jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *kaikilla* $0 < |x - x_0| < \delta$, *niin*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Tämäkin tulos on voimassa myös toispuoleisille raja-arvoille.

Funktion raja-arvon suppiloperiaate II

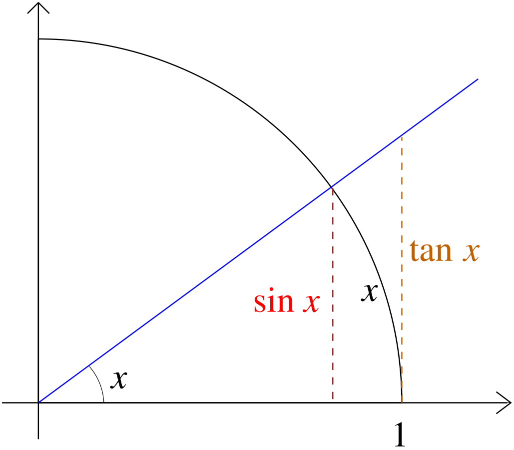
Esimerkki

Osoita, että
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ratkaisu: Geometrinen tarkastelu yksikköympyrän avulla (seuraava sivu) johtaa epäyhtälöön
$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
kun $0 < x < \pi/2$, joten
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{kaikilla} \quad 0 < x < \pi/2.$$

Koska $\cos x$ ja lauseke $(\sin x)/x$ ovat parillisia, niin sama epäyhtälö on voimassa kaikilla $0 < |x| < \pi/2$. Koska $\cos x \to \cos 0 = 1$, kun $x \to 0$, niin väite seuraa suppiloperiaatteesta.

Funktion raja-arvon suppiloperiaate III



$$\sin x < x < \tan x$$

Huom: Vertaa pinta-aloja, älä kaarenpituuksia!

Jatkuvuus ja raja-arvo

Lause

Jos funktion f määrittelyjoukko M_f on väli, niin funktion f jatkuvuus pisteessä $x_0 \in M_f$ on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funktion jatkaminen

Jos $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $x_0 \notin A$ on joukon A kasautumispiste ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, niin voidaan määritellä uusi funktio $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$, $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$, asettamalla

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A, \\ L, & \text{kun } x = x_0. \end{cases}$$

Tällöin $\overline{f}$ on jatkuva. Usein merkitään hiukan epätäsmällisesti $f = \overline{f}$.

Esimerkki

Funktio

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva koko reaaliakselilla.

Raja-arvon yleistykset

Myös seuraavat käsitteet voidaan määritellä täsmällisesti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \text{jne.}$$

Esimerkiksi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

jos pätee: Jokaista $M \in \mathbb{R}$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > M \quad \text{aina, kun } x \in A \quad \text{ja} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ on tärkeä mm. epäoleellisen integraalin yhteydessä.