MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 11: Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Prologi: Eulerin kaava

Imaginaariyksikkö i on **hypoteettinen olio**, joka toteuttaa $i^2 = -1$. Liittämällä imaginääriyksikkö reaalilukualueeseen ja muistamalla yksi uusi laskusääntö saadaan *kompleksiluvut* $\mathbb{C}$ (ks. erillinen moniste).

- Kompleksiluvut muotoa $z = x + iy$, jossa $x, y \in \mathbb{R}$.
- Kun eksponenttifunktion sarjakehitelmään sijoitetaan muuttujan paikalle ix ja ryhmitellään reaaliset termit erikseen, niin saadaan **Eulerin kaava**

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \quad \text{Taululla!}$$

- Tästä voidaan johtaa esitykset

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \ \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

- *Besonderes Gesamtkunstwerk* $e^{i\pi} + 1 = 0$, joka sitoo toisiinsa tärkeimmät luvut 0, 1, i, e ja π sekä kolme laskutoimitusta.

Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Korkeamman kertaluvun DY on harvoin ratkaistavissa ekplisiittisesti kaavan avulla, paitsi jos yhtälö on **lineaarinen**.

- Kertalukua n oleva lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),$$

  jossa jatkuvat funktiot $a_k(x)$ ja $r(x)$ on annettu.
- Lineaarisuus viittaa siihen, että ratkaisu y derivaattoineen ei esiinny yhtälössä epälineaaristen funktioiden kautta.
- Yhtälö on **homogeeninen**, jos **kuormafunktio** toteuttaa $r(x) \equiv 0$.
- Muussa tapauksessa yhtälö on **epähomogeeninen**.
- Se on **vakiokertoiminen**, jos jokainen **kerroin** $a_k(x) =$ vakio.

Huom: Kerroin $a_n(x)$ voidaan jakaa pois ilman seuraamuksia, jos sillä ei ole nollakohtia. Oletetaan jatkossa, että $a_n(x) \neq 0$ välillä $x \in I$.

Homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö I

Lineaarisen homogeenisen DY:n ratkaiseminen välillä I perustuu tähän:

(i) Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön ratkaisuja, niin myös **lineaarikombinaatio** $y = C_1y_1 + C_2y_2$ on ratkaisu mielivaltaisilla $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Taululla!

(ii) Yhtälöllä on välillä I määritellyt **perusratkaisut** $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, joiden avulla saadaa *yleisen ratkaisun* lauseke

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

missä $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}$ ovat vakioita. Sanotaan, että $y_1, \ldots, y_n$ muodostavat **ratkaisuavaruuden kannan**.

Homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö II

(iii) *Yksityisratkaisu* saadaan yleisen ratkaisun lausekkeesta, jos vaaditaan **alkuehdot**

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

jossakin pisteessä $x_0 \in I$.

(iv) Yleisen ratkaisun lauseke antaa kaikki mahdolliset ratkaisut. Mitään ylimääräisiä "erikoisratkaisuja" ei lineaarisella DY:llä ole olemassa, koska oletimme $a_n(x) \neq 0$ (vrt. yleinen separoituva 1. k.l. yhtälö).

Homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö III

Tehtäväksi jää siis keksiä jollain tavalla perusratkaisut $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, joita tarvitaan vieläpä olennaisesti erilaisia n kappaletta n. kertaluvun differentiaaliyhtälölle.

Määritelmä

Välillä $I \subset \mathbb{R}$ määritellyt funktiot $y_1, \ldots, y_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia (LRT), jos pätee:

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Lineaarisen riippumattomuuden määritelmä on sama kuin matriisilaskussa.

Kahden funktion $y_1,\ y_2$ tapauksessa LRT tarkoittaa sitä, ettei suhde $y_2(x)/y_1(x)$ ole vakiofunktio.

Vakiokertoiminen tapaus I

Vakiokertoimisen lineaarisen ja homogeenisen DY:n tapauksessa perusratkaisujen löytämiselle on olemassa resepti.

2. kertaluvun DY:lle $y'' + py' + qy = 0$ yleinen ratkaisu voidaan selvittää täydellisesti kaikilla vakioiden $p, q \in \mathbb{R}$ arvoilla tällä reseptillä:

- Sijoitetaan yhtälöön yrite $y(x) = e^{\lambda x}$.
- Tulos johtaa ns. **karakteristiseen yhtälöön**

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

  jossa on täsmälleen samat kertoimet kuin DY:ssä. Tämä taululla!
- Ratkaistaan karakteristisen yhtälön juuret $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Vakiokertoiminen tapaus II

- Kaksiulotteisen ($n = 2$) ratkaisuavaruuden kanta saadaan käsittelemällä erikseen kolme tapausta:
  (i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin suoraan

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ ja } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

  (ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \text{ ja } y_2(x) = xe^{\lambda x}.$$

  Perustelu: Taululla.

  (iii) Jos juuret ovat muotoa $\lambda = a \pm bi$, $b \neq 0$, niin

$$y_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \text{ ja } y_2(x) = e^{ax} \sin(bx).$$

  Perustelu: Taululla Eulerin kaavalla

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax} e^{\pm ibx} = e^{ax} \big(\cos(bx) \pm i \sin(bx)\big).$$

Esimerkki

Ratkaise DY $y'' + y' - 6y = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Ratkaisu: Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, jonka juuret ovat $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = 2$. Yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x},$$

jolloin $y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x}$. Alkuehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2 \\ 5 = y'(0) = -3C_1 + 2C_2, \end{cases}$$

josta $C_1 = -C_2 = -1$.

Alkuehdot toteuttava ratkaisu on siis $y(x) = e^{2x} - e^{-3x}$.

Esimerkki

Ratkaise vaimennetun värähtelijän differentiaaliyhtälö

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

jossa fysikaaliset vakiot toteuttavat $m, \mu, k \geq 0$.

Karakteristisen polynomien nollakohtien perusteella tulee erottaa kolme tapausta

$$\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} > 0, \quad \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} = 0, \quad \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} < 0,$$

joita kutsutaan alivaimennetuksi, kriittisesti vaimennetuksi ja ylivaimennetuksi.
Taululla.