MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 4: Derivaatta

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

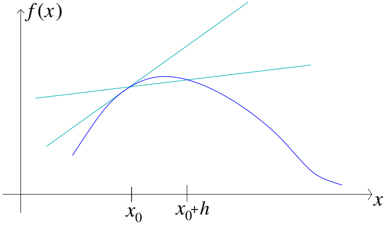
Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Derivaatta

Erilaisia lähestymistapoja:

- geometrinen (käyrän tangentti sekanttien raja-asentona)



- fysikaalinen (ajasta riippuvan funktion hetkellinen muutosnopeus).

Esimerkki

Kappaleen 1-ulotteisen liikkeen paikkakoordinaatti on $x = x(t)$ hetkellä t. Sen hetkellinen nopeus on keskinopeuksien raja-arvo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Derivaatan määritelmä

Määritelmä

Oletetaan, että funktio f on määritelty jollakin välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Sen derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

jos raja-arvo olemassa. Funktio on derivoituva, jos sillä on derivaatta jokaisessa määrittelyjoukon (= avoin väli) pisteessä.

Merkintöjä:

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad f' = Df = \frac{df}{dx}.$$

Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos funktion derivaatta $f'(x)$ on määritelty jollakin avoimella välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, niin voidaan tutkia funktion f' erotusosamäärää pisteessä x_0. Näin saadaan toisen kertaluvun derivaatta

$$f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0}.$$

Jatkamalla samaan tapaan voidaan määritellä korkeamman kertaluvun derivaatat $f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots$
Merkintä:

$$C^n\big(]a,b[\big) = \{f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ on } n \text{ kertaa derivoituva välillä }]a,b[\text{ ja } f^{(n)} \text{ on jatkuva}\}$$

Tällaisia funktioita kutsutaan *n* kertaa jatkuvasti derivoituviksi.

Linearisointi ja differentiaali

Derivaatan määritelmä johtaa approksimaatioon

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Oikean puoleinen lauseke on funktion f **linearisointi** eli **differentiaali** pisteessä x_0. Sille käytetään merkintää df.
Linearisoinnin kuvaaja

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

on funktion kuvaajan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetettu tangenttisuora.

Myöhemmin käsitellään funktion f approksimointia myös korkeamman asteen polynomien avulla (Taylor-polynomi).

Derivaatan fysikaalinen tulkinta

- Jos $x = x(t)$ on kappaleen yksiulotteisen liikkeen paikkakoordinaatti hetkellä t, niin sen hetkellinen nopeus on $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$. Näistä viimeinen on tavallinen merkintä fysiikassa.
- Vastaavalla tavalla $a(t) = v'(t) = x''(t) = \ddot{x}(t)$ on kappaleen hetkellinen kiihtyvyys.
- Yleisemmin: Ajasta riippuvan funktion $f(t)$ hetkellinen muutosnopeus on $f'(t)$.

Polynomifunktion derivaatta

Esimerkki

Johda funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0.

Ratkaisu: Erotusosamäärä on sievennettynä

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= 2x_0 + h,\end{aligned}$$

joten rajalla $h \to 0$ saadaan derivaataksi $f'(x_0) = 2x_0$.

Derivaattafunktion lauseke on siis muotoa $f'(x) = 2x$, kun $x \in \mathbf{R}$.

Entä jos olisi pyydetty johtamaan funktion $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, derivaatta?

Sinin derivaatta I

Esimerkki

Johda funktion $f(x) = \sin x$ derivaatta kohdassa x_0.

Ratkaisu: Erotusosamäärä saadaan yhteenlaskukaavan avulla muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \, \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \, \frac{\cos h - 1}{h}.\end{aligned}$$

Osoittamalla, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

niin derivaataksi saadaan $f'(x_0) = \cos x_0 \cdot 1 + \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$.
Että $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ johdettiin jo geometrisesti ja suppiloperiaatteella.

Sinin derivaatta II

Koska

$$\begin{aligned}\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \to -1 \cdot \frac{0}{2} = 0,\end{aligned}$$

kun $h \to 0$, niin saadaan jälkimmäinen raja-arvo.

Toisella rivillä käytettiin identiteettiä $\sin^2 h + \cos^2 h = 1$.

Laskusääntöjä

- Lineaarisuus
  $D\big(f(x) + g(x)\big) = f'(x) + g'(x)$
  $D\big(cf(x)\big) = cf'(x)$, kun $c \in \mathbf{R}$ on vakio
- Tulon derivoimissääntö
$$D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- Osamäärän derivoimissääntö
$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Yhdistetyn funktion derivoimissääntö
$$D\big(f(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Viimeiselle kaavalle käytetään nimitystä **ketjusääntö** = Chain Rule.

Eräitä derivaattoja

- $D(\text{vakiofunktio}) = 0$
- $D(x^r) = rx^{r-1}, \quad r \neq 0$
- $D(\sin x) = \cos x, \ D(\cos x) = -\sin x$
- $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, kun $x \neq \pi/2 + n\pi$
- $De^x = e^x$, $D \ln |x| = 1/x$, kun $x \neq 0$
  (näihin palataan myöhemmin)

Esimerkkejä

Käytännössä derivaatat voidaan laskea laskusääntöjen ja jo tunnettujen yksinkertaisempien derivaattojen avulla:

- $D\big(x^3 - 4x^2 + 6\big) = 3x^2 - 8x$
- $D\big(\sqrt{1+5x^2}\,\big) = \dfrac{1}{2}(1+5x^2)^{-1/2}D(1+5x^2) = \dfrac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$
- $D\big(x^2\cos(3x)\big) = D(x^2)\cos(3x) + x^2 D\big(\cos(3x)\big)$
  $= 2x\cos(3x) + x^2\big(-\sin(3x)\cdot D(3x)\big)$
  $= 2x\cos(3x) - 3x^2\sin(3x)$
- $D\big(\sin(1/x)\big) = \cos(1/x)D(1/x)$
  $= \cos(1/x)\cdot(-1/x^2)$
  $= -\cos(1/x)/x^2$, kun $x \neq 0$

Kaksi viimeistä läpi taululla.

Derivoituva funktio on jatkuva

Lause

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in]a,b[$, niin se on jatkuva pisteessä x_0.

Perustelu: Derivaatan määritelmästä saadaan

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0,h)$$

missä $\varepsilon(x_0,h)$ on raja-arvoon liittyvä virhetermi, jolle $\varepsilon(x_0,h) \to 0$ kun $h \to 0$.

Niinpä

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + h\,\varepsilon(x_0,h) \to 0 \text{ kun } h \to 0.$$

Derivaatta ääriarvokohdassa: Rollen lause

Lause

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on derivoituva (paikallisessa) ääriarvohdassa* $x_0 \in]a, b[$*, niin* $f'(x_0) = 0$*.*

Perustelu: Tarkastellaan paikallista maksimia pisteessä x_0.

Erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat erimerkkiset paikallisessa ääriarvokohdassa, koska

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{negatiivinen}}{\text{positiivinen}} &\leq 0, \text{ kun } h > 0, \\
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{negatiivinen}}{\text{negatiivinen}} &\geq 0, \text{ kun } h < 0
\end{aligned}$$

ja $|h|$ on niin pieni, että $f(x_0)$ on maksimi välillä $[x_0 - h, x_0 + h]$.

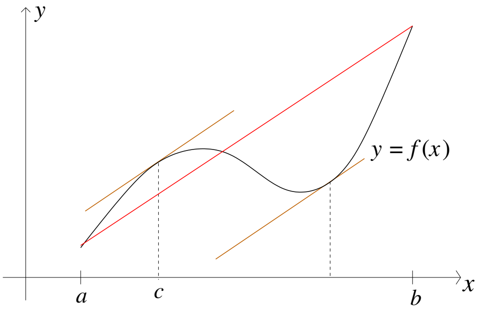
Koska f on derivoituva x_0:ssa, nämä toispuoliset raja-arvot ovat yhtäsuuria: siis molemmat $= 0$.

Väliarvolause I

Lause

Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja lisäksi derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $c \in]a,b[$, että

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \textit{ts.} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

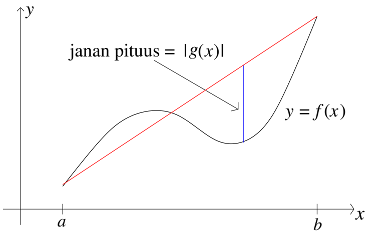


Väliarvolause II

Väliarvolauseen todistus: Sovelletaan Rollen lausetta apufunktioon

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

joka toteuttaa $g(a) = g(b) = 0$. Sen paikallisessa ääriarvokohdassa (miksi olemassa?) $c \in]a, b[$ pätee $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Väliarvolauseen seurauksia

- Jos $f'(x) = 0$ kaikissa avoimen välin pisteissä x, niin f on vakiofunktio tällä välillä.
- Jos $f'(x) \geq 0$ jollakin välillä, niin f on kasvava tällä välillä; jos $f'(x) \leq 0$ jollakin välillä, niin f on vähenevä tällä välillä.
- Jos edellisen kohdan lisäksi $f'(x) = 0$ ainoastaan yksittäisissä pisteissä, niin f on **aidosti** kasvava/vähenevä.
  Esimerkki: $f(x) = x^3$.

Tarkastellaan nämä taululla.

l'Hospitalin sääntö I

Raja-arvojen laskeminen derivaatan avulla; erilaisia versioita mm. tyyppiä "0/0" tai "∞/∞" oleville raja-arvoille; myös toispuoleisille.
Tärkein tapaus:

Lause

Oletetaan, että $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ja funktiot f, g ovat derivoituvia jollakin välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Jos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa, niin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

l'Hospitalin sääntö II

Perustelu:

Jos jo tehtyjen oletusten lisäksi $g'(x_0) \neq 0$ ja f, g jatkuvasti derivoituvia pisteessä x_0, perustelu on lyhyt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)}{\big(g(x) - g(x_0)\big)/(x - x_0)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ja toisaalta

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ilman näitä lisäoletuksia tarvitaan ns. Cauchyn yleistettyä väliarvolausetta, jonka mukaan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{jollain } c \in]x_0, x[.$$

Koko todistus löytyy mm. englanninkielisestä Wikipediasta.

l'Hospitalin sääntö III

Esimerkki

Laske raja-arvo $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$.

Ratkaisu: Koska $\sin(4x)/x$ on muotoa "$0/0$" kohdassa $x = 0$, niin voidaan (yrittää) soveltaa l'Hospitalin sääntöä:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos(4x)}{1} = 4.$$

Koska derivoidulla muodolla on raja-arvo 4, niin lasku on pätevä.
Huom. 1: Jos derivoitu raja-arvo on edelleen muotoa "$0/0$", niin sääntöä voidaan yrittää käyttää toisen (tai useamman) kerran.
Huom. 2: Muoto "$0/0$" on aina tarkistettava:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} \neq \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

Ääriarvotehtävät I

Seuraavassa $A \subset \mathbb{R}$ on väli.

- Funktiolla $f: A \to \mathbb{R}$ on paikallinen maksimi/minimi pisteessä $x_0 \in A$, jos x_0 on funktion f maksimi-/minimikohta jollakin välillä $A \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
- Paikallinen ääriarvo = paikallinen maksimi tai minimi; voi esiintyä myös määrittelyvälin päätepisteessä.
- Paikallinen ääriarvo voi olla ainoastaan joko
  (i) derivaatan nollakohdassa,
  (ii) määrittelyvälin päätepisteessä, tai
  (iii) sellaisessa kohdassa, jossa funktio ei ole derivoituva. MIKSI?
- Jos tiedetään etukäteen, että funktiolla on maksimi/minimi, niin etsitään kaikki mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat (vrt. edellinen), lasketaan niissä funktion arvot ja **valitaan** näistä suurin/pienin.

Ääriarvotehtävät II

Esimerkki

Määritä funktion $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 6x$, suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu: Derivaatan nollakohdat: $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Koska $-\sqrt{2} \notin [0,2]$, niin lasketaan arvot $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, $f(2) = -4$, joista voidaan valita funktion pienin arvo $-4\sqrt{2}$ ja suurin arvo 0.

Kuperuus

- **Kupera** eli **konveksi** alue $D \subset \mathbb{R}^2$: jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, niin myös niiden välinen yhdysjana $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset D$
- Välillä $I \subset \mathbb{R}$ määritelty funktio on **kupera** eli konveksi, jos sen kuvaajan yläpuolinen tasoalue on kupera; tähän riittää se että kuvaajalle piirretyt sekantit ovat aina kuvaajan yläpuolella, kaavana

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \text{ kun } x, y \in I, t \in [0,1].$$

- Erityisesti: jos $f''(x) \geq 0$ koko välillä, niin f on konveksi
- Funktion käännepiste: kohta, jossa kuvaajalla on tangentti ja funktion kuperuussuunta vaihtuu. Esimerkiksi, jos $f''(x)$ vaihtaa merkkiä.
- Jos funktion f derivaatan nollakohdassa x_0 on $f''(x_0) < 0$, niin kyseessä on paikallinen maksimi; jos $f''(x_0) > 0$, niin kyseessä on paikallinen minimi. Tapauksessa $f''(x_0) = 0$ tilannetta täytyy tutkia tarkemmin.