MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 2: Sarjat

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Sarja

Lukujonosta $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ voidaan muodostaa sen **osasummien jono** (s_n):

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .
\end{aligned}
$$

Määritelmä

Jos osasummien jonolla (s_n) on raja-arvo $s \in \mathbb{R}$, niin sanotaan, että jonosta (a_k) muodostettu **sarja suppenee** eli **konvergoi**, ja sen summa on s. Tällöin merkitään

$$
a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s.
$$

Indeksöinti

- Osasummat kannattaa indeksöidä samalla tavalla kuin jono (a_k); esim. jonon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ osasummat ovat $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1$ jne.
- Suppenevaan sarjaan voidaan tehdä summausindeksin siirtoja: esim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}.$$

- Konkreettisesti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Sarjan hajaantuminen I

- Jos sarja ei suppene, niin se **hajaantuu** eli **divergoi**.
- Kuten jonoilla yleensä, hajaantuminen voi tapahtua kolmella eri tavalla: (i) osasummat lähestyvät ääretöntä; (ii) osasummat lähestyvät miinus-ääretöntä; (iii) osasummien jono heilahtelee niin, ettei raja-arvoa ole.
- Hajaantuvan sarjan tapauksessa merkintä $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ei tarkoita mitään, erityisesti ei mitään reaalilukua. Jos kuitenkin $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, voidaan kirjoittaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Sarjan hajaantuminen II

- Monet sarjoihin liittyvät "kummallisuudet" johtuvat siitä, että sarjan summaaminen tulkitaan virheellisesti operaatioksi, jossa kaikki jonon alkiot lasketaan yhteen "samalla kertaa" kuten äärellisen monen termin summa..
- ... kun tosiasiassa sarjan summa lasketaan osasummien raja-arvona annetussa järjestyksessä, aloittaen termien alkupäästä.
- Tämän vuoksi osa äärellisten summien laskusäännöistä ei enää päde sarjoille. Joissakin tapauksissa esimerkiksi sarjan summa voi muuttua, jos sen äärettömän monen termin keskinäistä järjestystä vaihdetaan. Esimerkiksi vuorotteleva sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 \approx 0.693147180559945\ldots$$

voidaan termien järjestystä muuttamalla saada suppenemaan mihin tahansa reaalilukuun. Tauluesimerkki!

Geometrinen sarja I

Lause

Geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k$$

suppenee, jos $|q| < 1$ (tai $a = 0$), jolloin sen summa on $\frac{a}{1-q}$. Jos $|q| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Sarjan osasummille pätee $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$ (tauluesimerkki), josta väite seuraa. Samalla lähestymistavalla saadaan

$$\sum_{k=i}^{\infty} aq^k = \frac{aq^i}{1-q} = \frac{\text{sarjan 1. termi}}{1-q}, \quad \text{kun } |q| < 1.$$

Geometrinen sarja II

Esimerkki

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^{k+1}}$$

summa.

Ratkaisu: Koska

$$\frac{3}{4^{k+1}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k,$$

niin kyseessä on geometrinen sarja. Sen summaksi saadaan

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{4}.$$

Laskusääntöjä I

Lause

Suppenevien sarjojen ominaisuuksia:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(c\, a_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *kun* $c \in \mathbb{R}$ *on vakio*

Perustelu: Sarjan summa on sen osasummien muodostaman jonon raja-arvo. Tähän voidaan soveltaa jonon raja-arvon laskusääntöjä edelliseltä luennolta.

Laskusääntöjä II

Lause

Jos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee, niin* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Kääntäen: Jos $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *niin sarja* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

Perustelu: Jos sarjan summa on s, niin $a_k = s_k - s_{k-1} \to s - s = 0$.

Huom: Vaikka olisikin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, niin tämän perusteella *ei voida päätellä* sarjan suppenevan. Tämä ilmenee seuraavista esimerkeistä.

(Lyhyt ekskursio implikaation ja ekvivalenssin ihmeelliseen maailmaan.)

Laskusääntöjä III

Esimerkki

Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Sarjan yleisen termin raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

ei ole nolla, joten sarja hajaantuu.

Harmoninen sarja

Esimerkki

Harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

hajaantuu, vaikka sen yleisen termin $a_k = 1/k$ raja-arvo on nolla.

Ratkaisu: Tehdään tämä taululla osoittamalla ensin, että osasummien jono toteuttaa $s_{2n} > s_n + 1/2$.

Positiiviset sarjat I

Sarjan summan laskeminen on usein hankalaa tai mahdotonta (muuten kuin numeerisena likiarvona). Monissa tilanteissa on kuitenkin tärkeintä tietää, suppeneeko vai hajaantuuko tutkittava sarja.

Määritelmä

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ on **positiivinen** (tai positiiviterminen), jos $p_k \geq 0$ kaikilla k.

Positiivisille sarjoille suppenemisen tutkiminen on suoraviivaista:

Lause

Positiivinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu.

Syy: Positiivisen sarjan osasummien jono on nouseva... reaalilukujen täydellisyysaksiooma.

Positiiviset sarjat II

Esimerkki

Osoita, että *yliharmonisen* sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

osasummille on voimassa $s_n < 2$ kaikilla n, joten sarja suppenee.

Ratkaisu: Perustuu kaavaan

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

kun $k \geq 2$. Lasketaan “teleskooppisummauksella” taululla.

Leonhard Euler keksi v. 1735 sin-funktion tulokehitelmän avulla, että yliharmonisen sarjan summa on $\pi^2/6$.

Itseinen suppeneminen I

Määritelmä

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee **itseisesti**, jos positiivinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee.

Lause

Itseisesti suppeneva sarja suppenee, ja tällöin

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Perustelun idea: Tutkitaan erikseen positiivista ja negatiivista osaa: Olkoon $b_k = \max(a_k, 0) \geq 0$ ja $c_k = -\min(a_k, 0) \geq 0$. Koska $b_k, c_k \leq |a_k|$, niin positiiviset sarjat $\sum b_k$ ja $\sum c_k$ suppenevat aikaisemman lauseen perusteella. Lisäksi $a_k = b_k - c_k$, joten $\sum a_k$ on suppenevien sarjojen erotuksena suppeneva.

Itseinen suppeneminen II

Esimerkki

Tutki vuorottelevan sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Koska $\left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$ ja yliharmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee, niin tutkittava sarja suppenee itseisesti. Näin ollen se suppenee myös tavallisessa mielessä.

Vuorotteleva harmoninen sarja I

Itseinen suppeneminen ja (tavallinen) suppeneminen ovat kuitenkin eri käsitteitä:

Esimerkki

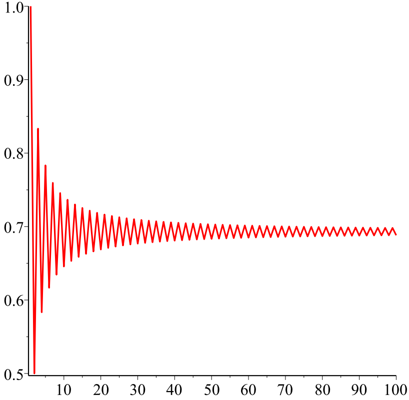
Vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

suppenee, mutta ei itseisesti (vrt. harmoninen sarja).

Ratkaisu: (Idea) Piirretään osasummien jonon (s_n) kuvaaja (seuraava sivu) ja tutkitaan erikseen parillisten ja parittomien indeksien osasummia s_{2n} ja s_{2n+1}.

Vuorotteleva harmoninen sarja II



100 ensimmäistä osasummaa (pisteet yhdistetty janoilla)

Majorantti ja minorantti I

Lause

Majoranttiperiaate: *Jos* $|a_k| \leq p_k$ *kaikilla* k *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *suppenee, niin myös* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*
Minoranttiperiaate: *Jos* $0 \leq p_k \leq a_k$ *kaikilla* k *ja* $\sum p_k$ *hajaantuu, niin myös* $\sum a_k$ *hajaantuu.*

Majorantin perustelu: Selvästi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee, koska sen kaikki osasummat ovat pienempiä kuin sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ vastaavat osasummat.

Niinpä sarja $\sum a_k$ suppenee itseisesti, ja siksi myös tavanomaisella tavalla.

Minorantin perustelu: Sarjan $\sum a_k$ osasummat hajaantuvat kohti ääretöntä, koska hajaantuvan positiivisen sarjan $\sum p_k$ termit p_k "vänkäävät" a_k:t kauemmaksi nollasta.

Suhdetesti

Käytännössä tärkein tapa suppenemisen tutkimiseen perustuu ns. **suhdetestiin**, jossa sarjan termejä verrataan sopivaan geometriseen sarjaan:

Lause

Jos jostakin indeksistä k alkaen on voimassa

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq Q < 1,$$

niin sarja $\sum a_k$ suppenee.

Perustelu: Sarjan alku ei vaikuta sen suppenemiseen, joten epäyhtälö voidaan olettaa kaikille indekseille. Tästä seuraa

$$|a_k| \leq Q|a_{k-1}| \leq Q^2|a_{k-2}| \leq \cdots \leq Q^k|a_0|,$$

joten sarjalle saadaan suppeneva geometrinen majorantti.

Suhdetestin raja-arvomuoto I

Lause

Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$, *niin sarja* $\sum a_k$

$$\begin{cases} \textit{suppenee,} & \textit{jos } 0 \le q < 1, \\ \textit{hajaantuu,} & \textit{jos } q > 1, \\ \textit{voi olla suppeneva tai hajaantuva,} & \textit{jos } q = 1. \end{cases}$$

Perustelu: Jos $0 \le q < 1$, niin jostain indeksistä k eteenpäin $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q + \frac{1-q}{2} = Q < 1$. (Valitse $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ raja-arvon määritelmässä.)

Jos $q > 1$, niin jostain indeksistä k eteenpäin $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > q - \frac{q-1}{2} = Q > 1$.