MS-A010{2,3,4,5} (ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 5: Taylor-polynomi ja sarja

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

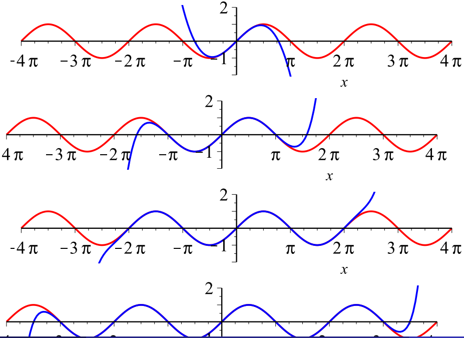
sin-funktio ja polynomit

Esimerkki

Verrataan funktion $\sin x$ kuvaajaa (punainen) polynomien

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

kuvaajiin (sininen), kun $n = 1, 4, 8, 12$.



Taylor-polynomi I

- Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ = funktion paras n-asteinen polynomiapproksimaatio (derivoinnin kannalta) pisteen x_0 lähellä. Maclaurin-polynomi: tapaus $x_0 = 0$.
- Jos f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0, niin polynomilla

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x; x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

on pisteessä x_0 samat derivaatat kuin f:llä kertalukuun n saakka.

Taylor-polynomi II

- Taylorin kaava: Jos derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa ja se on jatkuva funktio, niin $f(x) = P_n(x; x_0) + E_n(x)$ ja virhetermille $E_n(x)$ pätee

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

jossakin pisteessä $c \in [x_0, x]$. Vrt. väliarvolause!
Jos on olemassa indeksistä n riippumaton vakio M, jolle $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ jollakin välillä $x \in I$, niin tällöin

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Taylor-polynomi III

- Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

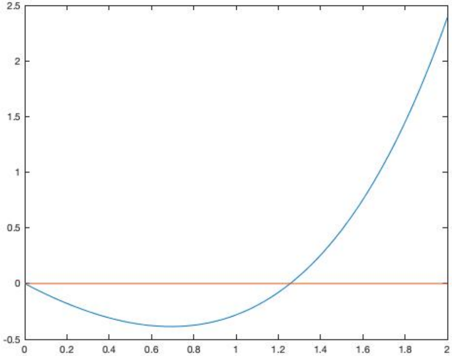
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}
$$

Newtonin menetelmä I

- Ensimmäisen asteen Taylor-polynomi $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on sama kuin funktion f linearisointi pisteessä x_0.
- Newtonin menetelmä: Yhtälö $f(x) = 0$ ratkaistaan likimääräisesti valitsemalla alkupiste x_0 (esimerkiksi kuvion perusteella) ja määrittelemällä
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ Näin saadaan lukujono $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, jonka termit antavat usein yhä parempia likiarvoja funktion f nollakohdalle.
- Newtonin iteraatio perustellaan geometrisesti etsimällä funktion nollakohtaa sen linearisoinnin (eli tangenttisuoran) avulla.
- Hyvän alkuarvauksen x_0 keksiminen saattaa olla haastavaa.

Newtonin menetelmä II

Erään transkendenttifunktion $f(x) = e^x - 2x - 1$ kuvaaja ja nollakohdat.



Täsmälleen kaksi ei-negatiivista nollakohtaa $x = 0$ ja $x \approx 1.2$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = e^x - 2x - 1 = 0$ MATLAB-koodilla:

```
function [P,iterNo] = newton(sP,tgtError)
% Weapon of Choice: MATLAB R2017b

f=@(x) exp(x)-2*x-1; Df=@(x) exp(x)-1;
P = sP; relError = 1; iterNo = 0;

while relError > tgtError
  POld = P; P = P - f(P)/Df(P);
  relError = norm(P - POld)/norm(P); iterNo = iterNo + 1;
end
fprintf('Number of iterations required %d. ', iterNo);
```

Ajetaan tämä alkuarvauksella $x_0 = 2$:

```
>> newton(2,1e-15)
Number of iterations required 38.
ans =
   1.25643120862617
```

Taylor-sarja I

- Jos Taylorin kaavan virhetermi $E_n(x)$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa, saadaan Taylor-polynomin raja-arvona funktion f Taylor-sarja (= Maclaurin-sarja, jos $x_0 = 0$).
- Taylor-sarja on siis muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Tämä on esimerkki yleisestä **potenssisarjasta**, joita esiintyy monien alkeisfunktioiden yhteydessä.

Taylor-sarja II

- Taylor-sarja voidaan muodostaa aina, kun funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0 ja ne sijoitetaan ym. kaavaan. Tähän liittyy kuitenkin kaksi ongelmaa:
  - Suppeneeko Taylor-sarja kaikilla muuttujan arvoilla? Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Maclaurin-sarja (= geometrinen sarja) suppenee vain arvoilla $-1 < x < 1$, vaikka funktio on derivoituva kaikilla $x \neq 1$:

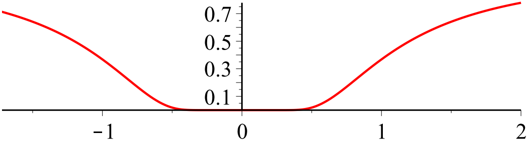
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Taylor-sarja III

- Jos sarja suppenee jollakin x, niin onko sarjan summa sama kuin $f(x)$? Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pätee $f^{(k)}(0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (hankala, mutta periaatteessa alkeellinen lasku). Näin ollen sen Maclaurin-sarja on identtisesti nolla ja suppenee kohti arvoa $f(x)$ ainoastaan pisteessä $x = 0$.



Johtopäätös: Taylor-sarjoja pitäisi tutkia tarkasti virhetermien jms. avulla. Käytännössä sarjoja muodostetaan käyttämällä apuna muutamia tunnettuja sarjakehitelmiä.

Taylor-sarja IV

- Esimerkkejä (eksponenttifunktioon palataan vielä myöhemmin):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1 \\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1
\end{aligned}
$$

Taylor-sarja V

Viimeinen on nimeltään binomisarja ja se on voimassa kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Jos $r = n \in \mathbb{N}$, niin sarjan kertoimet ovat nollia summausindeksistä $k = n + 1$ lähtien, ja kertoimet ovat muotoa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Vertaa **binomikaavaan:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

kun $n \in \mathbb{N}$.

Potenssisarja I

- Potenssisarja on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$$

oleva sarja. Piste x_0 on sarjan keskus ja luvut c_k sarjan kertoimia.

- Sarja *suppenee* arvolla x, jos yllä oleva raja-arvo on määritelty. Tämän suhteen on vain kolme erilaista tapausta:
  - sarja suppenee vain arvolla $x = x_0$ (jolloin sarjassa esiintyy vain vakiotermi c_0)
  - sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$
  - sarja suppenee jollakin välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ (ja mahdollisesti yhdessä tai molemmissa päätepisteissä), mutta hajaantuu muilla x:n arvoilla.

Luku R on potenssisarjan **suppenemissäde**.
Sopimus: $R = 0$ tai $R = \infty$ muissa tapauksissa.

Potenssisarja II

Esimerkki

Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^k$ suppenee?

Ratkaisu: Tutkitaan suppenemista suhdetestin avulla, kun $a_k = kx^k/2^k$. Tällöin

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)x^{k+1}/2^{k+1}}{kx^k/2^k}\right| = \frac{k+1}{2k}|x| \to \frac{|x|}{2},$$

kun $k \to \infty$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee, kun $|x|/2 < 1$, ja hajaantuu, kun $|x|/2 > 1$. Rajatapauksissa $|x|/2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.

Tulos: Sarja suppenee välillä $-2 < x < 2$ ja hajaantuu muulloin.

Potenssisarja III

- Suppenemisvälillä I tulee siis määriteltyä funktio $f: I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{1}$$

  joka on nimeltään sarjan **summafunktio**.

- Potenssisarjan summafunktio f on välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ jatkuva ja derivoituva. Lisäksi derivaatan $f'(x)$ voi laskea derivoimalla sarjaa (1) termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

  Huomaa, että vakiotermi c_0 derivoituu pois eli summa alkaa indeksistä $k = 1$. Lisäksi derivoitu sarja suppenee samalla välillä $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$; tämä on hieman yllättävää (miksi?) kertoimen k vuoksi.

Potenssisarja IV

- Tapauksessa $[a, b] \subset \,]x_0 - R, x_0 + R[$ potenssisarjan (1) voi myös integroida termeittäin:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b (x - x_0)^k\,dx.$$

Usein integrointi voidaan ulottaa myös suppenemisvälin päätepisteeseen saakka, mutta tämä ei aina pidä paikkaansa. Tilannetta täytyy siis tutkia tapauskohtaisesti.