# MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 8: Integraalifunktio ja epäoleellinen integraali

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

# Integraalifunktio I

## Määritelmä

Jos $G'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin $G$ on funktion $f$ **integraalifunktio** eli **määräämätön integraali** eli **antiderivaatta**.

Funktiota $f$ kutsutaan **integrandiksi**.

Integraalilaskennon peruslauseen mukaan kaikilla jatkuvilla funktioilla $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on eräs integraalifunktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

koska $F'(x) = f(x)$ kun $x \in ]a,b[$.

Mikä menee rikki jos $f$ on vain paloittain jatkuva?

# Integraalifunktio II

- Integraalifunktiota ei useinkaan voida esittää alkeisfunktioiden avulla ilman integrointimerkkiä tai sarjakehitelmää, vaikka $f$ itse olisikin alkeisfunktio.

  Mm. tällaisia integraalin kautta esitettyjä funktioita $F$ kutsutaan **erikoisfunktioiksi**. Esim. tapaus $f(x) = e^{-x^2}$, joka liittyy normaalijakaumaan.

- Integraalifunktio ei koskaan ole yksikäsitteinen, mutta välillä $[a, b]$ määritellyt eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan vain vakiolla; merkitään

  $$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \ \ C \in \mathbb{R} \ \text{ vakio},$$

  jossa $F'(x) = f(x)$.
  **Perustelu:** Jos $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ kaikilla $x$, niin funktion $F_1(x) - F_2(x)$ derivaatta on identtisesti nolla, joten se on vakio.

# Integraalifunktio III

- Jatkuvan funktion $f\colon [-1,0[\cup]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 \text{ kun } x \in [-1,0[, \\ \ln x + C_2 \text{ kun } x \in ]0,1], \end{cases}$$

  missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ovat mielivaltaisia integroimisvakioita.

  Määrittelyjoukon epäyhtenäisyys johtaa vakaviin ongelmiin integraalifunktion käytössä jopa jatkuvalla integrandilla $f$.

  Tämän esimerkin funktio ei ole edes paloittain jatkuva.

  (Se ei itse asiassa ole edes Riemann-integroituva. Ei edes epäolennaisena integraalina integroituva, niinkuin asia määritellään myöhemmin tällä luennolla.)

# Integraalifunktio IV

## Lause

*Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin sen määrätty integraali voidaan laskea (päätepisteissäkin jatkuvan) integraalifunktion $G$ avulla:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} G(x) = G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

**Perustelu:** Taululla.

Määrätty integraali voidaan siis laskea integraalifunktion tekemästä "hypystä" integroimisrajojen välillä. Tämä edellyttää sitä, että $f$ on tosiaankin määritelty (ja jatkuva) koko integroimisvälillä $[a, b]$.

Integroiminen on (usein) siis "derivoimista takaperin".

Mitä voi tapahtua, jos integroimisalue ei ole yhtenäinen?

# Integraalifunktio V

Monet integraalifunktiot saadaan suoraan derivoimissäännöistä:

$$
\begin{aligned}
\int x^r \, dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \;\; r \neq -1 \\
\int x^{-1} \, dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x \, dx &= e^x + C \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C
\end{aligned}
$$

# Integraalifunktio VI

## Esimerkki

Laske integraalit $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$ ja $\int_{0}^{1} \sin(\pi x)\,dx$.

**Ratkaisu:** Ensimmäinen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten integraalin arvo on

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = -e^{-1} + e^{1} = 2\sinh 1.$$

Toinen integraalifunktio on $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$, joten integraalin arvo on

$$\int_{0}^{1} \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

# Integraalifunktio VII

## Esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$.

**Ratkaisu:** Integraalifunktion oikea muoto voisi olla $F(x) = a(25-9x^2)^{1/2}$; tarkistetaan kerroin $a$ derivoimalla:

$$D\big(a(25-9x^2)^{1/2}\big) = a\cdot\frac{1}{2}\cdot(-18x)(25-9x^2)^{-1/2} = \frac{-9ax}{\sqrt{25-9x^2}},$$

joten valinnalla $a=-1/9$ saadaan oikea integraalifunktio. Näin ollen

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx = -\frac{1}{9}\Big/_0^1 (25-9x^2)^{1/2} = -\frac{1}{9}\big(\sqrt{16}-\sqrt{25}\,\big) = \frac{1}{9}.$$

# Integraalifunktio VIII

Peruslauseen avulla saadaan seuraava yleisempi derivoimiskaava:

**Lause**

*Jos $f$ on jatkuva ja funktiot $a$ ja $b$ ovat derivoituvia, niin*

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x).$$

**Perustelu:** Olkoon $F$ funktion $f$ integraalifunktio. Tällöin

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big).$$

Väite seuraa tästä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, koska $F' = f$.

Tämä on erinomainen esimerkki kaavasta, jota ei kannata opiskella ulkoa.

# Geometrisia sovelluksia I

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja $x$-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: $\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Miksi?

- Kun funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää $x$-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

# Geometrisia sovelluksia II

- Jos kappaletta leikataan $yz$-tason suuntaisella tasolla kohdassa $x$ ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on
$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$
- Kun funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää $x$-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$
Syy: Poikkileikkaus kohdassa $x$ on $f(x)$-säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.

# Geometrisia sovelluksia III

- Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää $x$-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx.$$

  Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx.$

- Kun käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pyörähtää $y$-akselin ympäri, niin vastaavan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

# Epäoleellinen integraali I

Riemann-integraali määriteltiin vain rajoitetuille funktioille $f$ äärellisellä välillä $[a, b]$. Käyttäen raja-arvoja, määritelmää voidaan laajentaa rajoittamattomiin funktioihin tai rajoittamattomiin integroimisväleihin.

Kaksi eri perustyyppiä ja lisäksi "sekatyypit":

- **Tyyppi I:** Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $]-\infty, b]$ tai koko $\mathbb{R}$.
- **Tyyppi II:** Funktio $f\colon\ ]a, b[ \to \mathbb{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä.
- **Sekatyyppi:** Sisältää sekä Tyypin **I** ja **II** piirteitä.

**Sekatyyppien käsittely**: Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta joko tyyppiä **I** tai tyyppiä **II**.

# Epäoleellinen integraali II

## Esimerkki

"Sekatyyppinen" epäoleellinen integraali tulkitaan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jossa oikealla puolella on Tyypin II ja I epäoleelliset integraalit tässä järjestyksessä.

Ovatko nämä integraalit jotenkin turhia,
jos niitä kerran kutsutaan epäoleellisiksi?

Nyt pitäisi vielä selvittää, että kuinka Tyypin I ja II integraalit lasketaan.

# Tyyppi I I

## Määritelmä

Olkoon $f : [a, \infty[ \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^{R} f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion $f$ **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $[a, \infty[$.

Vastaavasti funktiolle $f : ]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ määritellään

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

# Tyyppi I II

## Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

**Ratkaisu:** Koska

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -\Big/_{0}^{R} e^{-x} = 1 - e^{-R} \to 1,$$

kun $R \to \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

# Tyyppi II I

Määritellään Tyypin II perustapaus näin:

## Määritelmä

Olkoon $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, mutta ilman äärellistä raja-arvoa, kun $x \to a+$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion $f$ **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $]a, b]$.

# Tyyppi II II

## Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

**Ratkaisu:** Koska

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Big/_{\!\varepsilon}^{1} \sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2,$$

kun $\varepsilon \to 0+$, niin integraali suppenee ja sen arvo on 2.

# Integraali koko reaaliakselin yli I

## Esimerkki

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ ei kuitenkaan suppene, kuten hetken päästä havaitaan.

Joskus on kuitenkin tarvetta antaa epäoleelliselle divergoivalle integraalille tulkinta ylläolevan esimerkin mukaisesti. Silloin käytetään nimitystä **Cauchyn pääarvointegraali.**

# Integraali koko reaaliakselin yli II

## Määritelmä

Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Vasemman puolen integraalia sanotaan suppenevaksi jos ja vain jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

# Majoranttiperiaate I

Epäoleellisen integraalin suppenemista voidaan tutkia majoranttiperiaatteen avulla, josta seuraavassa eräs versio.

## Lause

*Olkoon* $|f(x)| \leq g(x)$ *välillä* $a < x \leq b$. *Jos epäoleellinen integraali*

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

*suppenee, niin myös*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

*suppenee ja sen itseisarvo on korkeintaan* $I$.

# Majoranttiperiaate II

## Esimerkki

Koska

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ välillä } 0 < x \leq 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on $< 2$.

# Majoranttiperiaate III

## Esimerkki

Vastaavasti

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ kun } x \geq 1.$$

Koska $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = 2$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on $< 2$.

Huomataan: Sopivan majorantin valinta riippuu sekä funktiosta että integroimisvälistä!