MS-A010{2,3,4,5} (SCI,ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 10: Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Radioaktiivinen hajoaminen

Radioaktiivisen aineen ydinten lukumäärää hetkellä t kuvaa funktio $y(t)$.

Lyhyellä aikavälillä $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, hajoavien ydinten lukumäärä $-\Delta y$ on likimain suoraan verrannollinen sekä aikavälin pituuteen että ydinten lukumäärään aikavälin alussa:

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \approx -k \cdot y(t) \cdot \Delta t.$$

Vakio $k > 0$ on aineesta riippuva *hajoamisvakio*. Tästä saadaan

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky(t),$$

ja rajalla $\Delta t \to 0$ *differentiaaliyhtälö* $y'(t) = -ky(t)$.

Hajoamislain differentiaaliyhtälö $y' = ky$

Lause

Olkoon $k \in \mathbb{R}$ vakio. Kaikki differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = ky(x), \ x \in \mathbb{R},$$

toteuttavat funktiot $y = y(x)$ ovat muotoa $y(x) = Ce^{kx}$, jossa C on vakio. Jos funktion y arvo tunnetaan jossakin pisteessä x_0, niin vakiolle C saadaan yksikäsitteinen arvo.

Perustelu:

$$\begin{aligned}
y'(x) = ky(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = 0 \quad \big| \ \text{koska} \ \ e^{-kx} > 0 \ \forall x \\
&\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{-kx} - ke^{-kx}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(y(x)e^{-kx}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-kx} = C = \text{vakio} \quad \big| \ \text{Väliarvolause!} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{kx}.
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälö I

Yleiskäsitteitä:

- *Differentiaaliyhtälö* (lyh. DY, engl. ODE) on yhtälö, joka sitoo toisiinsa funktion $y = y(x)$ ja eräitä sen derivaattoja

$$y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots$$

- DY:n *kertaluku* on korkeimman yhtälössä esiintyvän derivaatan kertaluku n.
- Kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

  kun F on jokin $(n+2)$:sta muuttujasta riippuva lauseke.
- Funktio y on yhtälön *ratkaisu*.
- DY:n ratkaisun muuttujaa (tässä x) ei aina kirjoiteta näkyviin.

Differentiaaliyhtälö II

Esimerkki

(i) Differentiaaliyhtälön $y' + 3y = \sin(x)$ kertaluku on 1.
(ii) Differentiaaliyhtälön $y'' + 5y' - 6y = e^x$ kertaluku on 2.

- DY:illä mallinnetaan jatkuvalla tavalla muuttuvia ilmiöitä, jonka vuoksi muuttuja x on yleensä jollakin avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$.
- Lisäksi yhtälöön voi liittyä alkuehtoja tai reunaehtoja tämän välin päätepisteissä.
- Differentiaaliyhtälön

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

eräs ratkaisu on mikä tahansa sellainen n kertaa derivoituva funktio $y(x)$, jolle yhtälö toteutuu kaikilla $x \in I$.

Huomaa kuitenkin: Eri ratkaisuilla voi olla erilainen määrittelyväli I.

Differentiaaliyhtälö III

Esimerkki

Differentiaaliyhtälön $xy^2 + y' = 0$ ratkaisuja ovat mm.

- $y_0(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$;
- $y_1(x) = 2/x^2, \ x > 0$;
- $y_2(x) = 2/x^2, \ x < 0$;
- $y_3(x) = 2/(x^2 + 3), \ x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki

Differentiaaliyhtälöllä $\sin(y' + y) = 2$ ei ole lainkaan ratkaisuja.

Ratkaisujen tarkistamiseen riittää derivointi ja sijoitus yhtälöön.

Ei ole olemassa mitään yleispätevää symbolista ratkaisumenetelmää edes 1. kertaluvun DY:ille, koska jo integraalifunktion löytäminenkin on erään sellaisen differentiaaliyhtälön ratkaisemista.

1. kertaluvun yhtälön suuntakenttä I

Eräissä tapauksissa 1. kertaluvun yhtälöstä

$$F(x, y, y') = 0$$

voidaan ratkaista derivaatta yksikäsitteisesti muodossa

$$y' = f(x, y).$$

Jos DY:n eräs ratkaisu $y = y(x)$ kulkee pisteen $(x, y) = (x_0, y_0)$ kautta, niin funktio f antaa tällöin sen ratkaisun tangentin kulmakertoimen eli ratkaisukäyrän etenemissuunnan tässä pisteessä.

Siksi *alkuehdon* $y(x_0) = y_0$ toteuttavia ratkaisuja yhtälölle $y' = f(x, y)$ on täsmälleen yksi vaikkei ratkaisun lauseketta voida aina muodostaa.

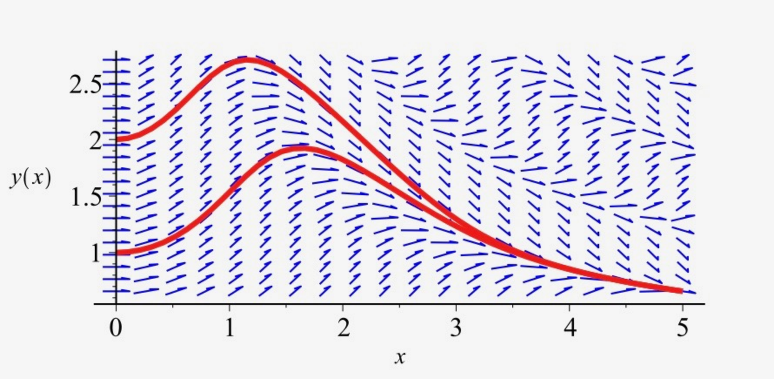
Yhtälöä voidaan siis havainnollistaa xy-tason vektorikentällä $\mathbf{i} + f(x_k, y_k)\mathbf{j}$, kun se piirretään sopiviin hilapisteisiin (x_k, y_k). Suuntakenttä.

1. kertaluvun yhtälön suuntakenttä II

Esimerkki

Hahmotellaan differentiaaliyhtälön $y' = \sin(xy)$ ratkaisukäyriä suuntakentän avulla.

Esimerkiksi $x_0 = 1,\ y_0 = \pi/2 \Rightarrow y'(1) = \sin(1 \cdot \pi/2) = 1.$



1. kertaluvun yhtälön suuntakenttä III

Yhteenvetona:

- DY:n $y' = f(x, y)$ suuntakentän avulla saadaan halutun pisteen $(x, y) = (x_0, y_0)$ kautta kulkevan ratkaisun likiarvoja ja kuvaaja selville. Numeerinen menetelmä!
- Ratkaisukäyrät ovat sellaisia käyriä, jotka mahdollisimman hyvin seuraavat suuntakenttää.
- Ratkaisukäyriä voi piirtää jopa viivottimella ja millimetripaperilla.
- Monissa sovelluksissa ratkaisun eksplisiittinen lauseke ei ole edes tarpeen. Kuvaaja tai taulukoituja arvoja ratkaisusta riittävät.

Separoituva DY I

Separoituvan differentiaaliyhtälön yleinen muoto on

$$y' = f(x)g(y),$$

missä f ja g ovat jatkuvia yhden muuttujan funktioita.

Separoituvuus-nimitys tulee siitä, että x ja y -riippuvuudet voidaan yhtälön oikealla puolella eristää erillisiin funktioihinsa.

Hajoamislain differentiaaliyhtälö $y' = ky$ on toiseksi helpoin tapaus separoituvasta differentiaaliyhtälöstä.

Mikä on helpoin tapaus?

Separoituvalle differentiaaliyhtälölle on periaatteessa olemassa systemaattinen ratkaisumenetelmä, mutta välivaiheissa voi tulla ongelmia hankalien integraalifunktioiden tai käänteisfunktioiden takia.

Separoituva DY II

Separoituva differentiaaliyhtälö ratkaistaan seuraavalla muodollisella, infinitesimaaleja käyttävällä laskulla:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \text{Separointi!} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad H(y) = F(x) + C \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = H^{-1}(F(x) + C).
\end{aligned}
$$

Tässä on H on funktion $h(s) = 1/g(s)$ integraalifunktio, jonka käänteisfunktiota merkitään H^{-1}.

Tuloksena saadaan DY:n yleinen ratkaisu eli ratkaisuparvi, jossa on mukana vakio vielä määräämätön integroimisvakio $C \in \mathbb{R}$.

Separoituva DY III

Jos mukana on alkuehto $y(x_0) = y_0$, niin voidaan oikaista vastaavaan yksityisratkaisuun ilman yleistä ratkaisua:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&\Leftrightarrow \quad H(y) - H(y_0) = F(x) - F(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = H^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + H(y_0)\big).
\end{aligned}$$

Toinen tapa: Kiinnitetään yleisen ratkaisun vakio C alkuehdon $y(x_0) = y_0$ avulla.

Separoituva DY IV

Esimerkki

Etsi differentiaaliyhtälön $y' = x/y$ yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: DY on separoituva: $f(x) = x$ ja $g(y) = 1/y \neq 0$. Saadaan siis

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad y\,dy = x\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \int x\,dx + C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2C}.
\end{aligned}$$

Esimerkki

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = x/y$ alkuehdolla $y(0) = 5$.

Ratkaisu: Jos yleistä ratkaisua ei tarvita, niin alkuehto voidaan ottaa huomioon jo integroinnissa.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad y\,dy = x\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int_5^y s\,ds = \int_0^x t\,dt \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y^2 - 25) = \frac{1}{2}(x^2 - 0) \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 25}.
\end{aligned}
$$

Lopuksi täytyy vielä alkuehdon $y(0) = 5 > 0$ perusteella valita $+$-merkki.

Separoituvan DY:n erikoisratkaisut I

Separoituvan DY:n yleisestä ratkaisusta jää yleensä pois sellaisia ratkaisuja, jotka liittyvät funktion $g(y)$ nollakohtiin.

- Syy: Lausekkeella $g(y(x))$ jakaminen separoinnissa edellyttää, ettei se ole nolla.
- Jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa DY:n $y' = f(x)g(y)$ vakioratkaisu $y(x) \equiv \alpha$, koska tällöin $y'(x) \equiv 0 = g(\alpha) \equiv g(y(x))$.
- Näitä ratkaisuja kutsutaan yhtälön triviaali- tai erikoisratkaisuiksi.

Separoituvan DY:n erikoisratkaisut II

Myös ei-separoituville 1. kertaluvun yhtälöille pätee ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulos.

Lause (Picard–Lindelöf)

Olkoon f on jatkuva (kahden muuttujan) funktio. Alkuarvotehtävälle $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ pätee:
(i) On olemassa **vähintään yksi** *alkuehdon toteuttava ratkaisu $y = y(x)$ jollakin pisteen x_0 sisältävällä välillä.*
(ii) Jos lisäksi f on jatkuvasti derivoituva muuttujan y suhteen, niin alkuehdon toteuttava ratkaisu on **yksikäsitteinen***.*
(iii) Yksikäsitteisyys on voimassa myös silloin, kun kohdan (i) lisäksi f on jatkuvasti derivoituva muuttujan x suhteen ja $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Perustelu: Olisi aivan mahdollista ymmärtää, mutta ei nyt.

Suomalainen matemaatikko Ernst Lindelöf (1870-1946).

Separoituvan DY:n erikoisratkaisut III

Picard–Lindelöfin lause tulkittuna separoituvan yhtälön erikoistapauksessa:

Lause

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y' = f(x)g(y)$, kun f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva.
(i) Jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa triviaaliratkaisu $y(x) \equiv \alpha =$ vakio.
(ii) DY:n kaikki muut ratkaisut saadaan yllä esitetyllä tavalla separoimalla muuttujat ja integroimalla.

Ensiksi havaitaan Picard–Lindelöfin lauseesta, että lauseen oletuksilla yhtälöllä $y' = f(x)g(y)$ alkuehdolla $y(x_0) = y_0$ on aina **yksikäsitteinen** ratkaisu mille tahansa pisteparille $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Pitää vielä tarkistaa, että jokainen tällainen ratkaisu on saavutettavissa **joko** separointimenettelyllä **tai** triviaaliratkaisuna.

Separoituvan DY:n erikoisratkaisut IV

Perustelu jälkimmäiselle osalle:

- Kuten jo sanottu, DY:n määrittelyalueen jokaisen pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee yksikäsitteinen ratkaisukäyrä suuntakentän määräämässä suunnassa.
- Yhtälön ratkaisukäyrät (ratkaisujen kuvaajat) eivät koskaan "pääty kesken", vaan ne joko törmäävät yhtälön määrittelyalueen reunaan tai katoavat suuntakentän saattelemana $\pm$ äärettömyyteen.
- **Erityisesti:** ratkaisukäyrät eivät voi leikata toisiaan eikä yksittäinen ratkaisukäyrä voi haarautua kahteen tai useampaan osaan. Miksi eivät?
- Separoituvan DY:n muut ratkaisukäyrät eivät siis voi leikata triviaaliratkaisukäyriä $y = \alpha$, joten kaikille muille ratkaisuille ehto $g(y(x)) \neq 0$ on automaattisesti voimassa ja separoituvuus näin ollen luvallista!

Ei siis ole muita ratkaisuja kuin trivaaleja tai separoituvia M.O.T.